大阪大学数学ⅠAⅡB＋C（ベクトル）を受講する皆さんへ

このテキストを手にしている皆さんは，志高くここまで勉強を進めてきたと思います。その努力を，**大阪大学に通用する力に仕上げるために必要なこと**とは？　・・・それをお話しする前に，まずは皆さんは**「細やかな技術」**がきちんと身についていますか？ とくに高２までに数学の各分野のさまざまな問題を通じ，皆さんはさまざまな技術を磨いてきたはずです。もし不足している部分・分野が自覚された時には，速やかに技術を再び磨いておいてください。

さて，数学においてはよく「応用力がない」という声を耳にします。それはいわゆる「公式暗記型」でしか数学を勉強していない人によく見られる気がします。「２次方程式が異なる２つの実数解をもつ」 ⇒ 「判別式 $D>0$」といったように。数学で大切なのは「⇒」，いわゆる「プロセス」の部分です。そこに至る「背景」「理由」ですね。それを理解した上で「⇒」をショートカットする分にはまったくかまいませんが。皆さんはちゃんとそれを自覚してきましたか？

そして，「応用力」とはまさに**「プロセス力」**と言えましょう。問題を見たとき，その問題が語っていることをその字面の奥に潜む部分まで読み込み，どこに自分の手で解決しなければならない「壁」があるのかを考えるわけです。さらに壁を越えるために何が必要か。その「鍵」がこの「⇒」に隠されています。そうです，それを選択すべき「理由」があるのです。はたまた，時には形の美しさといった，数学の枠を越えた部分にヒントが隠されていることもあるでしょう。それを見抜き，立式し，磨いた技術をもって計算し答案として仕上げていくのです。

このテキストは，この**「プロセス力」を養うために必要な問題が厳選**されています。後述しますが，このテキストの使い方に従い，画面を通じて伝わってくるものを目で，耳で，肌で吸収し，自分のものとするための**復習を実践**すれば（ここ大事！），無限に広がる数学の世界の扉は確実に開かれます。今日の授業から何が皆さんに伝わってきたのか。それを反芻し，他の異なる場面においても**「考える」癖をつける**。それこそが，大阪大学に通用する力となるでしょう。

そうです。**「この講座だけをやればいい」のではありません**。「傾向と対策」というものは，大学入試には存在しません。「たまたま」出ることが多かった分野に絞って勉強することのリスクが高すぎるからです。扉を開いた後は，自ら歩んでいくことです。そのために<u>必要な問題集もご紹介</u>いたします。扉が開かれているのにその先に進まない人はいないでしょう。なぜならば，その先にあなた方が目指す「大阪大学」があるのですから。

この講座を見るたびに，さまざまな「開かずの扉」が音を立てて開くでしょう。決してテクニカルなことは要求しません。必要なのは，磨いてきたはずの**技術**，そしてその技術を活かすべくこの講座をとらえる**謙虚な姿勢**，そして受かりたいという**気持ち**です。その気持ちで授業を聞き，もし感動することがあっても，感動したという事実だけでその日を終わらないでください。せっかく開きかけた扉も，時間がたてば自動的に閉まりますよ。<u>**真に感動すべきは，自分で「未知なる道」を切り開いた時**</u>です。その感動をかみしめながら，一歩，また一歩，大阪大学を目指して前進しましょう。何かを見失ったとき，忘れた時、私は，指南役としていつもあなたのそばに現れます。

山内　恵介

＜大阪大学数学ⅠAⅡB＋C（ベクトル）　目次＞

第１講　方程式・不等式
第２講　図形と方程式
第３講　微分法・積分法①
第４講　微分法・積分法②
第５講　ベクトル
第６講　数列
第７講　場合の数・確率
第８講　整数問題
第９講　総合問題⑴
第10講　総合問題⑵

＜講座の受講の仕方＞

①　予習について

すべての講は「講義問題」３問で形成されています。まずは何も見ないで問題をノートまたはルーズリーフに解いてみましょう。自分が問題をとらえる力がどこまで養われているかわかります。

ここでは必ずしも答案形式にこだわる必要はありません。掲載されている問題はすべて実際に大阪大学の入試に出題されたものですから，最後まで解けないことも多いかもしれません。それでも，いろいろな可能性を追ってみましょう。

ちなみに１問にかけてよい時間はおよそ20分です。もちろん，このまま続ければ（おそらく）最後の答に行き着く！ というところまで行っている場合は，30分まではかけて結構です。３問でおよそ１時間から１時間半。数学に本気で向き合う時間です。

②　講義について

予習をすることで自分の見るべきポイントが押さえられた状態，これが講義を受ける前に必要な準備です。それができている状態で授業を見て，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。問題が掲載されているページはすべて見開きの構成となっており，余白（「Note」欄）がふんだんに用意されています。ここには何でも「自由」に書いて残すことができます。「自由」とはどういうことか。 それは，このスペースに画面上の黒板に書かれたことを「書き写すのみ」に留まることは厳禁，ということです。授業時間は限られています

から，先生は全てを黒板に書くことはしていません。よって，授業を聞き，先生が話したことや自分なりに感じ取ったことを記しておくべきなのです。きれいにまとめても誰も見てくれませんよ。あくまで「Note」＝「記録」です。後から見て自分だけがわかる程度でいいのです。

ちなみにここまでの人生で書く速度を速くする努力をしてこなかった人へ。この講座はいつでも止めたり戻ったりできます。もちろん，聞きながら書くという訓練はこれからでも遅くありません。ちなみに止められるからといって「考えすぎ」は逆に厳禁です。あなた方に残された時間は限られています。勉強は数学だけじゃないでしょう？ 大枠をとらえた上で，細かいところに後からこだわる姿勢も大事です。もちろんそれでも「今日はこれを解決しないと眠れない！」という人…。明日は寝不足で学校に行くことになるかもしれませんが，先生がとことんお付き合いしますよ。そんな日も時にはあっていいのかもしれませんね。

ちなみに各講義を通じ，この問題から得られることを「Point Pickup」と題して簡潔にお伝えいたします。これもテキストに残しておきましょう。

③　復習について　その１

まずは問題によって語られた「ストーリー」を，テキストの問題やPoint Pickupを見ながらもう一度頭に描いてみましょう。もし思い出せない場面があったらノートを見てみましょう。そしてそこで描いた世界観を元に，次に自分で実際に問題を解いてみましょう。予習と異なり，ここでは計算も含め実際に丁寧に記述していきましょう。もし全然歯がたたない場合は，もう一度講座を視聴することをお勧めします。

もちろん数学という科目の特性上，あなたの技術力の不足などで途中で止まってしまうかもしれません。また，あなたの想いをどう記述で表現していいかわからない場合もあるかもしれません。安心してください。すべての問題に「模範解答」がついています。必要に応じ，画面を見る，またはプリントアウトして参考にしてください。

講義問題の復習をこのように欠かすことなく行い，解答を自分で書き上げることができた時が，先生から得たものが自分のものになった瞬間です。こうして書き上げた答案を，テキストと一緒に保存しておきましょう。

また１回の復習で納得のいくものが書けないケースもあるかと思います。そういった場合は，時間をおいて今一度問題を解き直すことをお勧めします。チャンスは「空き時間」「隙間時間」です。一度自分で取り組んだことは，次は確実に速度と正確性が上がります。それを実感することも成長の糧となるでしょう。

④　復習について　その２

③が終わったら，新たな問題にチャレンジしたくなるでしょう。「練習問題」が各講２題ずつ用意してあります。講義の問題に関連する問題もあれば，発展的な内容もあります。また問題によって難易度もさまざまです。

解き終えたら，「解答」を見て自分の到達具合をチェックしてみましょう。解答にはワンポイントのコメントもついています。この「練習問題」もまた，みなさんの成長のために厳選し

た問題です。より理解を深めていただきたく思います。

以上を確実に繰り返すことにより，確実に「自分で考える」領域に至ることができます。それはもしかしたら自分の力だけで到達したかもしれない領域です。しかしながら，もしそうであったとしても，そこに至る確実性の高いものがあるとしたら，それを選択することによって浮いた時間や労力を他の学習に回すことができるでしょう。この講義がそういう目的をかなえるための存在であること，それは繰り返しますがサイクルを確実に構築した人だけがわかることです。みなさんの日々の努力，期待しています。

〈 Memo 〉

第１講　方程式・不等式

1　どのような実数 x に対しても，不等式

$$|x^3+ax^2+bx+c| \leqq |x^3|$$

が成り立つように，実数 a，b，c を定めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

2　実数 x，y が $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x^3+y^3=1$ を満たしながら変わるとき，$x+y$ がとりうる値の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

< Note >

3　実数 a，b，c の関係式　$a^2+b^2+c^2-10a-11=0$，$a^2-bc-4a-5=0$　について，次の問いに答えよ．

(1)　実数 a がどのような範囲の値であるとき，上の関係式を満たす実数 b，c が存在するか．その a の範囲を求めよ．

(2)　実数 a，b，c が上の関係式を満たすとき，$ab+bc+ca$ の最小値を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

第２講　図形と方程式

1　$a>b>0$ とする．円 $x^2+y^2=a^2$ 上の点 $\left(b, \sqrt{a^2-b^2}\right)$ における接線と x 軸との交点をＰとする．また，円の外部の点 (b, c) からこの円に２本の接線を引き，接点をＱ，Ｒとする．このとき，２点Ｑ，Ｒを通る直線はＰを通ることを示せ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

2 放物線 $y=ax^2-bx+b$ と直線 $y=a^2x$ を考える．この放物線と直線は 2 交点 P，Q をもち，P と Q の x 座標の差の絶対値は 1 である．ただし，$a>0$ とする．放物線の一部である弧 PQ 上の点と直線の距離の最大値を d とする．

(1) d を a を用いて表せ．

(2) d を最大にする a と b の値を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

3　放物線 $y=x^2+4x$ 上に直線 OP に関して対称な異なる 2 点が存在する．この条件を満たす点 P の存在する範囲を図示せよ．ただし，O は原点である．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

第３講　微分法，積分法①

1　[1]　実数を係数とする３次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が異なる３つの実数解をもつとする．このとき，$a>0$，$b>0$ ならば，少なくとも２つの実数解は負であることを示せ．

[2]　p，q は定数で $p \geqq 2$，$q \geqq 2$ とする．２つの３次方程式 $x^3+x-p=0$，$x^3+x-q=0$ の実数解をそれぞれ α，β とするとき，$|\alpha-\beta| \leqq \dfrac{1}{4}|p-q|$ が成り立つことを示せ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

2 3次式 $f(x)=x^3+5x^2+3x+c$（c は定数）について次の問いに答えよ．

(1) $f(x)=0$ が3個の相異なる実数解をもつためには，c の値はどんな範囲になければならないか．

(2) $f(x)=0$ が3個の相異なる整数解をもつことがあるか．また2個の相異なる整数を解としてもつのはどんな場合か．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

3 関数 $f(x)=x-2+3|x-1|$ を考える．$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で，関数

$$g(x)=\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|+\left|\int_x^2 f(t)\,dt\right|$$

の最大値を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

第４講　微分法，積分法②

1　放物線 C：$y=-x^2+2x+1$ と x 軸の共有点を A$(a, 0)$，B$(b, 0)$ とし，C と直線 $y=mx$ の共有点を P$(\alpha,\ m\alpha)$，Q$(\beta,\ m\beta)$，原点を O とする．ただし，$a<b$，$m\neq 0$，$\alpha<\beta$ とする．線分 OP，OA と C で囲まれた図形の面積と線分 OQ，OB と C で囲まれた図形の面積が等しいとき，m の値を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

2　関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+1-|x-1|)$ のグラフが，直線 $x=a$ を軸とする放物線 $y=g(x)$ と2つの点で接している．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　関数 $g(x)$ を求めよ．

(2)　$g(x)$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さを求めよ．

(3)　$f(x)$ のグラフと $g(x)$ のグラフとによって囲まれた図形の面積を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

3　原点を通る傾きが正の直線 l を考える．いま点Pが原点から直線 l に沿って第１象限を直進し，直線 l と曲線 $C：y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x^3$ の交点 $\mathrm{Q}\left(a, \dfrac{a^3}{\sqrt{3}}\right)$ で反射した後，再び直進する．ただし，点Qにおいて，C の接線に対し，入射角と反射角は等しいとする．反射後の点Pの進行方向が y 軸と平行になるとき，次の問いに答えよ．

(1)　a の値を求めよ．

(2)　点Qにおける接線と曲線 C が囲む図形の面積を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

第５講　ベクトル

1　△OABの辺OA，AB，BOの各々を $t:1-t$ の比に内分する点をそれぞれP，Q，Rとする．ここで t は $0<t<1$ を満たす実数とする．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|}=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ が t の値によらず成り立つのは△OABがどのような三角形のときか．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

2 ［1］ 点Oを中心とする円を考える．この円の円周上に3点A，B，Cがあって $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ を満たしている．このとき，三角形ABCは正三角形であることを証明せよ．

［2］ 空間に相異なる4点O$(0, 0, 0)$，A$(a, 0, 0)$，B$(0, b, 0)$，C(c, c, c)がある．ただし，a，bは正の数とする．4点O，A，B，Cからの距離が等しい点P(x, y, z)がxy平面に関してCと同じ側（xy平面上は除く）にあるのは，a，b，cにどのような関係があるときか．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

3　xyz 空間において，xy 平面上に原点を中心とする半径 2 の円 C がある．また，点 $(0,\ 1,\ 0)$ を通りベクトル $(1,\ 1,\ -2)$ に平行な直線を l とする．この l 上の動点 P から最短距離にある C 上の点を Q とする．点 P が l の全体を動くとき，点 Q が動く範囲を図示せよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

第6講　数列

1　［1］　数列 $\{a_n\}$ を初項1，公比 r の等比数列とし，数列 $\{b_n\}$ を初項1，公比 s の等比数列とする．第 n 項が $x_n=a_n+b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で与えられる数列 $\{x_n\}$ を考える．

$x_2=2$，$x_4=14$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　r，s を求めよ．ただし $r>s$ とする．

(2)　すべての自然数 n について $x_{n+2}=2x_{n+1}+x_n$ が成り立つことを示せ．

［2］　正の整数 a_1，a_2，a_3，a_4 がこの順に等比数列をなし，公比 r が整数でなく，かつ $r>1$ である．このとき，a_4 のとりうる値の最小値とそのときの a_1 を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

2 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定め，数列 $\{b_n\}$ を
$b_1=a_1a_2$，$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}a_{n+2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定める．

(1) 一般項 a_n を n を用いて表せ．

(2) 一般項 b_n を n を用いて表せ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

3 p，q は正の整数とし，2 次方程式 $x^2-px-q=0$ の 2 つの実数解を α，β とする．$A_n=\alpha^n+\beta^n$ とおくとき，すべての正の整数 n について次のことが成り立つことを示せ．

(1)　A_n は整数である．

(2)　$A_{3n}-{A_n}^3$ は 3 で割り切れる．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

第７講　場合の数・確率

1　外観上区別のつかない N 個 ($N \geqq 3$) の袋が並んでいて，k 番目 ($k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N$) の袋には赤球 k 個と白球 $N-k$ 個が入っている．これらの袋を混ぜ合わせたのち，任意に１つの袋を選定し，選ばれた袋から１球ずつ順に球を取り出す試行について，次の確率を求めよ．

(1)　取り出された球をもとの袋に戻す試行の場合，２回目まで続けて赤球が出る確率．

(2)　取り出された球をもとの袋に戻さない試行の場合，３回目に赤球が出る確率．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

2 コインを n 回投げて表が出た回数を X_n とする．X_n が 3 の倍数となる確率を p_n，3 で割って 2 余る確率を q_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_1，p_2，q_1，q_2 を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，p_n，q_nを p_{n-1}，q_{n-1} で表せ．

(3) $n \geqq 4$ のとき，p_n を p_{n-3} で表せ．

(4) $k \geqq 1$ のとき，p_{3k}，p_{3k+1}，p_{3k+2} をそれぞれ k を用いて表せ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

3　袋の中に赤球が a 個，白球が b 個入っている．この袋から無作為に 1 個の球を取り出し，その色を記録して袋に戻す．この試行をくり返し，同じ色の球が 2 回続けて出るか，または試行の回数が $2N$ に達したとき，試行を止める．ただし，N は 2 以上の一定の自然数とする．この試行がちょうど k 回で終わる確率を P_k $(k=1,\ 2,\cdots\cdots,\ 2N)$ とし，$p=\dfrac{a}{a+b}$，$q=\dfrac{b}{a+b}$，$r=pq$ とおく．

(1)　P_{2l}，P_{2l+1} $(l=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N-1)$ および P_{2N} を r を用いて表せ．

(2)　試行の回数の期待値 E は，定数 A，B を用いて $E=\mathrm{A}+\mathrm{B}(r+r^2+\cdots\cdots+r^{N-1})$ と表されることを示し，A，B を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

第8講　整数問題

1　[1]　正の整数の組 $(a,\ b)$ で，a 以上 b 以下の整数の総和が 500 となるものをすべて求めよ．ただし，$a < b$ とする．

[2]　自然数の列 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 は等比数列であるとし，

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$S' = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5$$

$$T = {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + {a_4}^2 + {a_5}^2$$　とおく．

(1)　整数 T は整数 S で割り切れ，その商は S' となることを示せ．

(2)　T が素数となる場合の T の値を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

2 ［1］　どのような負でない２つの整数 m と n を用いても $x=3m+5n$ とは表すことができない正の整数 x をすべて求めよ．

［2］　$10^{2x} \leqq y \leqq 10^{5x}$ と $y \leqq 10^{6-x}$ を同時に満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

3　どのような自然数 n に対しても $\sum_{k=1}^{n}(ak^2+bk+1)$ が常に n で割り切れるような整数 a, b の組 $(a,\ b)$ は　$0<a\leqq 6m$　かつ　$0<b\leqq 6m$（ただし m は自然数）の範囲に全体で何組あるか．その個数を m で表せ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

第９講　総合問題(1)

1　平面上に，点 O を中心とし点 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6 を頂点とする正六角形がある．O を通りその平面上にある直線 l を考え，各 A_k と l との距離をそれぞれ d_k とする．このとき $D = d_1{}^2 + d_2{}^2 + d_3{}^2 + d_4{}^2 + d_5{}^2 + d_6{}^2$ は l によらず一定であることを示し，その値を求めよ．ただし，$OA_k = r$ とする．

【Point Pickup】

< Note >

2　赤球，白球，青球がそれぞれ a 個，b 個，c 個 $(0<a\leqq b\leqq c)$ 入った箱から2個の球を同時に取り出すことを考える．

(1)　$n=a+b+c$，$s=a^2+b^2+c^2$ とする．取り出した2個の球の色が異なる確率 $P(a,\ b,\ c)$ を n，s を用いて表せ．

(2)　$n=11$ のとき，$P(a,\ b,\ c)$ を最大にする a，b，c と，そのときの $P(a,\ b,\ c)$ の値を求めよ．

【Point Pickup】

< Note >

3　$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対し，2 乗してちょうど n けたの数となる正の整数の個数を $f(n)$ とする．このとき，$f(n+1)>f(n)$ であることを証明せよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

第10講　総合問題(2)

1　$f(x)=\sum_{k=1}^{10} k|x-k|$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$x<1$ のとき，$f'(x)$ の値を求めよ．

(2)　$x>10$ のとき，$f'(x)$ の値を求めよ．

(3)　$1 \leqq n \leqq 9$ を満たす整数 n に対し，$n<x<n+1$ における $f'(x)$ の値を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

2　平面上において，点Oを始点とする2つの半直線を l_1，l_2 とし，それらのなす角は鋭角 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．点Aは l_1 上の点で $\mathrm{OA}=1$，点Bは l_2 上の点で $\mathrm{OB}=b$ とする．次に，直線AB上に点Oからおろした垂線と直線ABの交点をPとする．

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によりベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とするとき，t を b と θ を用いて表せ．

(2)　θ を固定し，b を $b>0$ の範囲で動かすとき，点Pが l_1，l_2 ではさまれる部分（ただし l_1，l_2 も含む）にあるための b の範囲を求めよ．

(3)　b が(2)で求めた範囲で動くとき，点Pの描く軌跡と l_1，l_2 で囲まれる部分の面積を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

3　不等式$\{\log_4(x^2+y^2)-\log_8(x^3-y^3)\}\{\log_2 y-\log_4(x^2-2y+y^2)\}>0$を満たす点（$x$，$y$）の存在する範囲を図示せよ．また，その面積を求めよ．

【Point Pickup】

< Note >

第１講　方程式・不等式　練習問題

1　座標平面上の点 $(x,\ y)$ が $x^2-2xy+2y^2=4$ を満たして動くとき，次の問いに答えよ．

(1)　$x+y$ の最大値を求めよ．

(2)　$\dfrac{x}{y+4}$ の最大値を求めよ．

2　k は -1 でない実数の定数とする．$x+y=k$ であるとき，$x^3+y^3-3xy+1=0$ を満たす実数 x，y が存在するような k の値と，そのときの x，y の値を求めよ．

第2講　図形と方程式　練習問題

1　a は正の実数とし，座標平面上の直線 $l: y=x$ と放物線 $C: y=ax^2$ を考える．C 上の点 $(x,\ y)$ $\left(ただし\ 0<x<\dfrac{1}{a}\right)$ で l との距離を最大にする点を $\mathrm{P}(s,\ t)$ とおく．また P と l との距離を d とおく．

(1)　d，s，t をそれぞれ a の式で表せ．また点 P での放物線 C の接線の傾きを求めよ．

(2)　実数 a を $a>0$ の範囲で動かしたとき，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の軌跡を求め，図示せよ．

2　不等式 $2y>x+1+3|x-1|$ が表す座標平面上の領域を D とする．実数 a に対して，放物線 C を $y=x^2-2ax+a^2+a+2$ で定める．このとき，C 上の点がすべて D の点となるような a の範囲を求めよ．

第３講　微分法，積分法①　練習問題

1　3 次関数 $f(x)=x^3-3x^2-4x+k$ について，次の問いに答えよ．ただし，k は定数とする．

(1)　$f(x)$ が極値をとるときの x を求めよ．

(2)　方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 つの整数解をもつとき，k の値およびその整数解を求めよ．

2　$f(x)=-(x+1)|x-4|+6$ とし，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ とする．

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフをかきなさい．

(2)　$F(x)$ を計算しなさい．

(3)　$0 \leqq x \leqq 6$ における関数 $F(x)$ の最大値を求めなさい．

第４講　微分法，積分法②　練習問題

1　円$x^2+y^2=1$をCとし，直線$y=\dfrac{1}{2}$をlとする．Cに内接しlに接する円の中心をPとする．Pの軌跡のうちy座標が$\dfrac{1}{2}$より大きい部分とlによって囲まれる図形の面積を求めよ．

2　xy 平面において，放物線 $y=ax^2+bx+c$ が曲線 $y=x-|x|+1$ と異なる 2 点で接しているとする．放物線 $y=ax^2+bx+c$ と曲線 $y=x-|x|+1$ および 2 直線 $x=-1$, $x=1$ によって囲まれた図形の面積の最小値を求めよ．

第5講　ベクトル　練習問題

1　点Oを中心とし，半径がrである円に内接する△ABCについて，3辺AB，BC，CAをそれぞれ2：1に内分する点をA′，B′，C′とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおく．次の問いに答えよ．

(1)　rと内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を用いて$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right|^2$を表せ．

(2)　3点A′，B′，C′を通る円の中心が点Oと一致するとき，△ABCが正三角形であることを示せ．

2　座標空間で次の８つの点

A$(-1,\ 1,\ 2)$，B$(-1,\ -1,\ 2)$，C$(1,\ -1,\ 2)$，D$(1,\ 1,\ 2)$

E$(-1,\ 1,\ 0)$，F$(-1,-1,0)$，G$(1,\ -1,\ 0)$，H$(1,\ 1,\ 0)$

を頂点とする１辺の長さ２の立方体 ABCD−EFGH を考える．

いま，点 P$(x,\ y,\ 0)$ を正方形 EFGH 内の点（辺上も含む，ただし P$\neq$G）とし，点 A と点 G を通る直線を l とする．

(1)　点 Q を直線 l 上の点で $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{AG}}$（$t$ は実数）を満たすものとする．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ が直交するとき t を x と y で表せ．

(2)　点 P から直線 l に下ろした垂線の足は点 A と点 G の間にあることを証明せよ．

(3)　点 P が原点 O$(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする xy 平面上の半径１の円周上を動くとし，P の座標を $(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ と書くことにする．このとき，三角形 APG の面積の最大値と最小値，およびそれらを与える θ の値を求めよ．

第6講　数列　練習問題

1 (1)　整数からなる公差1の等差数列 a, b, c, d で $a^3+b^3+c^3=d^3$ を満たすものを求めよ.

(2)　0でない整数からなる等比数列 a, b, c, d で $a^3+b^3+c^3=d^3$ を満たすものは存在しないことを示せ.

2　数列 $\{a_n\}$ は，すべての正の整数 n に対して　$0 \leqq 3a_n \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k$　を満たしているとする．このとき，すべての n に対して $a_n = 0$ であることを示せ．

第７講　場合の数・確率　練習問題

1　２つの袋があって，そのどちらにも赤球１つ，白球１つの計２個ずつの球が入っている．両方の袋から無作為に球を１つずつ取り出して入れ替える．この操作を n 回引き続いて行ったとき，はじめのように各袋に赤球と白球が１つずつ入っている確率を p_n とする．

(1)　$n \geqq 2$ として，p_{n-1} と p_n との関係式を求めよ．

(2)　p_n を求めよ．

2　表が出る確率が $p\,(0<p<1)$ のコイン3枚を同時に投げたとき，表と裏が出る事象をA，少なくとも1枚が表である事象をBとする．次の問いに答えよ．

(1)　事象 $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$，$\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ および $\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}$ の確率を求めよ．

(2)　$(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cup\left(\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}\right)$ は表と裏がどのように出る事象かを答え，その確率を求めよ．

(3)　表1枚につき k 点もらえるとする．得点の期待値が $6p$ のとき，k の値を求めよ．

第 8 講　整数問題　練習問題

1　2 つの整数の平方の和で表される整数の集合を A とする．以下の問いに答えよ．

(1)　集合 A のある要素 a^2+b^2 (a，b は整数) が 3 で割り切れるとき，a，b はともに 3 で割り切れることを示せ．

(2)　x を整数とする．$9x$ が集合 A の要素であるとき，x は集合 A の要素であることを示せ．

2　2 次の多項式 $f(x)$ の係数はいずれも負でない整数であり，$f(1)=15$，$f(2)=33$ であるとする．さらに，自然数 n に対して $f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)$ はつねに n で割り切れるものとする．このような $f(x)$ をすべて求めよ．

第 9 講　総合問題(1)　練習問題

1　$|\cos^2 x + a\sin x + b| \leqq 3$ がすべての実数 x について成り立つような，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ．

2　xyz 空間内の 3 点P(0, 0, 1), Q(0, 0, −1), R(t, t^2-t+1, 0)を考える．t が $0 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，三角形PQR が通過してできる立体を K とする．以下の問いに答えよ．

(1)　K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ．

(2)　K の体積を求めよ．

第10講　総合問題(2)　練習問題

1　実数 x に対して，x を越えない最大の整数を $[x]$ で表す．

$a_m=[\sqrt{m}]\ (m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ に対して，数列 b_1，b_2，b_3，$\cdots\cdots$ を，$b_1=0$，$k\geqq 2$ のとき $a_m<k\leqq a_{m+1}$ となる m に対して $b_k=m$ と定める．次の問いに答えよ．

(1)　数列 $\{b_k\}$ の一般項を求めよ．

(2)　すべての自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2}a_m+\sum_{k=1}^{n}b_k=n^3$ が成り立つことを示せ．

(3)　$\displaystyle\sum_{m-1}^{n^2}[\sqrt{m}]$ を求めよ．

2　座標平面上に直線 l：$x\sin\theta+y\cos\theta=1$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$がある.

不等式　$x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $x\sin\theta+y\cos\theta\geqq 1$が表す領域を D,

不等式　$x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $x\sin\theta+y\cos\theta\leqq 1$ が表す領域をD'とする.

D 内に半径 R の 2 つの円C_1, C_2を, C_1は l と y 軸に接し, C_2は l と x 軸に接し, さらにC_1とC_2が外接するようにとる. またD'内に半径 r の 2 つの円C_1', C_2'を, C_1'は l と y 軸に接し, C_2'は l と x 軸に接し, さらにC_1'とC_2'が外接するようにとる.

(1)　$\dfrac{r}{R}$ を θ で表せ.

(2)　θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, $\dfrac{r}{R}$ のとりうる値の範囲を求めよ.

テキスト解答

第1講　方程式・不等式

1　どのような実数 x に対しても，不等式

$$|x^3+ax^2+bx+c| \leqq |x^3| \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つように，実数 a，b，c を定めよ．

①がすべての実数 x で成り立つためには $x=0$ で成り立つことが必要である．

よって，$|c| \leqq 0$　　ゆえに　$c=0$

このとき①は

$$|x^3+ax^2+bx| \leqq |x^3| \qquad |x||x^2+ax+b| \leqq |x||x^2|$$

$x \neq 0$ のとき

$$|x^2+ax+b| \leqq |x^2| = x^2 \quad \text{つまり} \quad -x^2 \leqq x^2+ax+b \leqq x^2$$

これがすべての実数 $x(\neq 0)$ で成り立つ条件を考えればよい．

　$-x^2 \leqq x^2+ax+b$　より　$2x^2+ax+b \geqq 0$　　よって　$a^2-8b \leqq 0$　$\cdots\cdots$②

　$x^2+ax+b \leqq x^2$　より　$ax+b \leqq 0$　　よって　$a=0$，$b \leqq 0$　$\cdots\cdots$③

②と③が同時に成り立つのは　$a=b=0$　のとき

以上より，$a=b=c=0$ であることが必要である．

逆に，$a=b=c=0$ のとき，①は　$|x^3| \leqq |x^3|$　これはすべての実数 x で成立し十分である．

したがって，求める条件は　$\boldsymbol{a=b=c=0}$

2　実数 x，y が $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x^3+y^3=1$ を満たしながら変わるとき，$x+y$ がとりうる値の範囲を求めよ．

$x^3+y^3=1$ より　$y^3=1-x^3$

　$y \geqq 0$ より，$y^3 \geqq 0$　つまり $1-x^3 \geqq 0$　　$x^3 \leqq 1$　ゆえに　$x \leqq 1$　つまり　$0 \leqq x \leqq 1$

である．

同様に　$0 \leqq y \leqq 1$

このとき，$x+y=k$ とおき，k のとりうる値の範囲を求める．

　$y=k-x$　これを　$x^3+y^3=1$ に代入して

　$x^3+(k-x)^3=1$

　$3kx^2-3k^2x+k^3-1=0$　$\cdots\cdots$①

①が $0 \leqq x \leqq 1$ に少なくとも1つの実数解をもつときの k の範囲を求める．

$f(x)=3kx^2-3k^2x+k^3-1$　とおく $(k \neq 0)$　　グラフの軸は $x=\dfrac{k}{2}$

$$f(0)=k^3-1=(k-1)(k^2+k+1)=(k-1)\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}$$

$f(1)=k^3-3k^2+3k-1=(k-1)^3$

よって，$f(0)$，$f(1)$ は正負を共にするので，①が $0\leqq x\leqq 1$ に解をもつとすれば２解とも（重解含む）$0\leqq x\leqq 1$ に存在する．

よって，$0\leqq \dfrac{k}{2}\leqq 1$　より　$0<k\leqq 2$　……②　このとき，$f(x)$ のグラフは下に凸となる．

$f(0)\geqq 0$　かつ　$f(1)\geqq 0$　より　$k\geqq 1$　……③

$f(x)=0$ の判別式 D について，$D\geqq 0$ より

$9k^4-12k(k^3-1)\geqq 0$　　$k^3-4\leqq 0$　　$k\leqq \sqrt[3]{4}$　……④

②～④より $1\leqq k\leqq \sqrt[3]{4}$　　ゆえに　$\boldsymbol{1\leqq x+y\leqq \sqrt[3]{4}}$

3　実数 a，b，c の関係式　$a^2+b^2+c^2-10a-11=0$　…①，$a^2-bc-4a-5=0$　…②
について，次の問いに答えよ．

(1)　実数 a がどのような範囲の値であるとき，上の関係式を満たす実数 b，c が存在するか．その a の範囲を求めよ．

(2)　実数 a，b，c が上の関係式を満たすとき，$ab+bc+ca$ の最小値を求めよ．

(1)　②より　$bc=a^2-4a-5$　…③

①より　$b^2+c^2=-a^2+10a+11$

$(b+c)^2-2bc=-a^2+10a+11$

$(b+c)^2=2bc-a^2+10a+11=2(a^2-4a-5)-a^2+10a+11=a^2+2a+1=(a+1)^2$

$b+c=\pm(a+1)$　…④

③，④より b，c は２次方程式　$t^2\mp(a+1)t+a^2-4a-5=0$　の２解である．

実数条件より　$(a+1)^2-4(a^2-4a-5)\geqq 0$

$a^2-6a-7\leqq 0$

$(a+1)(a-7)\leqq 0$

よって，求める a の範囲は　$\boldsymbol{-1\leqq a\leqq 7}$

(2)　$ab+bc+ca=(b+c)a+bc=\pm(a+1)a+a^2-4a-5$

$$=\begin{cases}2a^2-3a-5=f_1(a)\\ -5a-5=f_2(a)\end{cases}$$　とおく．

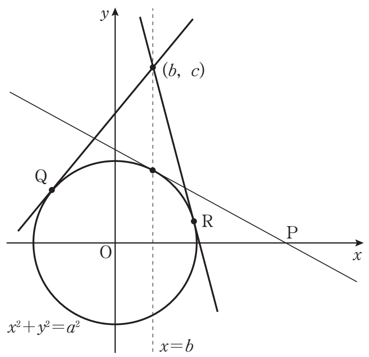
$f_1(a)=2\left(a-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{49}{8}$ より，(1)の範囲で $f_1(a)$ は $a=\dfrac{3}{4}$ のとき最小値 $-\dfrac{49}{8}$ をとる．

$f_2(a)$は単調減少である．よって，(1)の範囲で$f_2(a)$は$a=7$のとき最小値-40をとる．

以上より，$ab+bc+ca$ の最小値は　$\boldsymbol{-40}$

第２講　図形と方程式

1　$a>b>0$ とする．円 $x^2+y^2=a^2$ 上の点 $\left(b,\ \sqrt{a^2-b^2}\right)$ における接線と x 軸との交点をＰとする．また，円の外部の点 $(b,\ c)$ からこの円に２本の接線を引き，接点をＱ，Ｒとする．このとき，２点Ｑ，Ｒを通る直線はＰを通ることを示せ．



$x^2+y^2=a^2$ 上の点 $\left(b,\ \sqrt{a^2-b^2}\right)$ における接線の方程式は

$$bx+\sqrt{a^2-b^2}\,y=a^2 \qquad \text{よって}\quad \mathrm{P}\left(\frac{a^2}{b},\ 0\right)$$

$\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{R}(x_2,\ y_2)$ とすると点Ｑ，Ｒにおける円の接線の方程式はそれぞれ

$x_1x+y_1y=a^2$，　$x_2x+y_2y=a^2$　となる．

これらがともに $(b,\ c)$ を通るので

$x_1b+y_1c=a^2$，　$x_2b+y_2c=a^2$

$$\text{つまり}\ \begin{cases} bx_1+cy_1=a^2 \\ bx_2+cy_2=a^2 \end{cases}$$

これらは点Ｑ，Ｒが直線 $bx+cy=a^2$ 上にあることを示す．よって，直線QRの方程式は

$bx+cy=a^2$

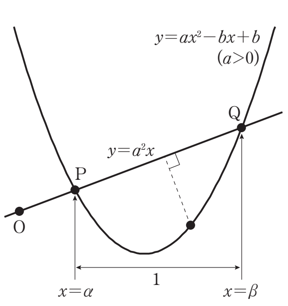
この直線と x 軸との交点は $\left(\dfrac{a^2}{b},\ 0\right)$ であり，これはＰの座標と一致する．

ゆえに２点Ｑ，Ｒを通る直線はＰを通る．

2　放物線 $y=ax^2-bx+b$ と直線 $y=a^2x$ を考える．この放物線と直線は２交点Ｐ，Ｑをもち，ＰとＱの x 座標の差の絶対値は１である．ただし，$a>0$ とする．放物線の一部である弧PQ上の点と直線の距離の最大値を d とする．

(1)　d を a を用いて表せ．

(2)　d を最大にする a と b の値を求めよ．



(1)　放物線と直線の交点の x 座標は　$ax^2-bx+b=a^2x$ の解

つまり　$ax^2-(a^2+b)x+b=0$　…① の２解である．

この２解を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると　$\beta-\alpha=1$ ……②

弧PQ上の点 $(t,\ at^2-bt+b)$ と直線 $a^2x-y=0$ の距離は

$$\frac{|a^2t-at^2+bt-b|}{\sqrt{a^4+1}}=\frac{|-a(t-\alpha)(t-\beta)|}{\sqrt{a^4+1}}=\frac{-a(t-\alpha)(t-\beta)}{\sqrt{a^4+1}}$$

$\left(\begin{matrix}-a<0 \\ \alpha\leqq t\leqq\beta\end{matrix}\right)$　これが最大となるのは $t=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ のとき

$$\text{ゆえに}\quad d=\frac{-a\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)}{\sqrt{a^4+1}}=\frac{a(\beta-\alpha)^2}{4\sqrt{a^4+1}}=\boldsymbol{\frac{a}{4\sqrt{a^4+1}}}\quad \text{（②より）}$$

(2)　$d=\dfrac{a}{4\sqrt{a^4+1}}=\dfrac{1}{4\sqrt{a^2+\dfrac{1}{a^2}}}$　($a>0$ より)

$a^2>0$ より　$a^2+\dfrac{1}{a^2}\geqq 2\sqrt{a^2\cdot\dfrac{1}{a^2}}=2$　等号成立は　$a^2=\dfrac{1}{a^2}$　つまり　$a=1$ のとき

ゆえに　$d\leqq\dfrac{1}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ であり，$a=1$ のとき d は最大となる．

このとき ①より　$x^2-(b+1)x+b=0$　　$x=b,\ 1$

$b>1$ のとき，②より　$b-1=1$　　$b=2$

$b<1$ のとき，②より　$1-b=1$　　$b=0$

よって，d を最大にする a，b は $(a,\ b)=\mathbf{(1,\ 0),\ (1,\ 2)}$

3　放物線 $y=x^2+4x$ 上に直線 OP に関して対称な異なる 2 点が存在する．この条件を満たす点 P の存在する範囲を図示せよ．ただし，O は原点である．

$A(\alpha,\ \alpha^2+4\alpha)$，$B(\beta,\ \beta^2+4\beta)$ とする　$(\alpha<\beta)$

x 軸，y 軸に関して対称な点はないので，OP：$y=mx$（$m\neq 0$）とおく．

OP に関して点 A と点 B が対称のとき

AB ⊥ OP より　$\dfrac{(\beta^2+4\beta)-(\alpha^2+4\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot m=-1$　　よって　$\alpha+\beta=-\dfrac{1}{m}-4$　……①

AB の中点が OP 上より　$\dfrac{(\alpha^2+4\alpha)+(\beta^2+4\beta)}{2}=m\cdot\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(m-4)(\alpha+\beta)$

$\alpha\beta=\dfrac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2+(4-m)(\alpha+\beta)\}=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+4-m)$

これに①を代入して整理すると　$\alpha\beta=\dfrac{(4m+1)(m^2+1)}{2m^2}$　……②

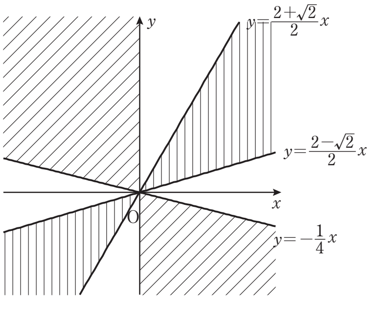
①，②より α，β は 2 次方程式　$X^2+\left(\dfrac{4m+1}{m}\right)X+\dfrac{(4m+1)(m^2+1)}{2m^2}=0$　の 2 解である．

実数条件より　$\left(\dfrac{4m+1}{m}\right)^2-4\cdot\dfrac{(4m+1)(m^2+1)}{2m^2}>0$　　$(4m+1)(2m^2-4m+1)<0$

ゆえに　$m<-\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<m<\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

点 P はこの範囲にある m を傾きにもつ直線 OP 上に存在する．

よって，点 P の存在する範囲は右図斜線部分．（境界含まない）



第３講　微分法，積分法①

1 ［1］　実数を係数とする３次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が異なる３つの実数解をもつとする．このとき，$a>0$，$b>0$ ならば，少なくとも２つの実数解は負であることを示せ．

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおくと，$f'(x)=3x^2+2ax+b$　　軸：$x=-\dfrac{a}{3}$　$f'(0)=b$

$a>0$，$b>0$ のとき　(軸)<0，$f'(0)>0$

よって，$x\geqq 0$ において　$f'(x)>0$　つまり　$f(x)$は単調増加

ゆえに，$x\geqq 0$ における $f(x)=0$ の解は多くて１つである．

よって，$f(x)=0$ が異なる３実数解をもつならば，$x<0$ に少なくとも２つの解をもつ．

1 ［2］　p，q は定数で $p\geqq 2$，$q\geqq 2$ とする．２つの３次方程式 $x^3+x-p=0$，$x^3+x-q=0$ の実数解をそれぞれ α，β とするとき，$|\alpha-\beta|\leqq\dfrac{1}{4}|p-q|$ が成り立つことを示せ．

$x^3+x-p=0$　より　$x^3+x=p$　$(p\geqq 2)$

$f(x)=x^3+x$ とおくと，$f'(x)=3x^2+1>0$ より $f(x)$ は単調増加である．

よって，$f(x)=2$ となる x はただ１つあり，$f(1)=2$ より，それは$x=1$

ゆえに $f(x)=p$　$(p\geqq 2)$　の実数解 α について $\alpha\geqq 1$ である．同様に $\beta\geqq 1$ である．

また，$\alpha^3+\alpha-p=0$，$\beta^3+\beta-q=0$より

$$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha-\beta)=p-q \qquad (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+1)=p-q$$

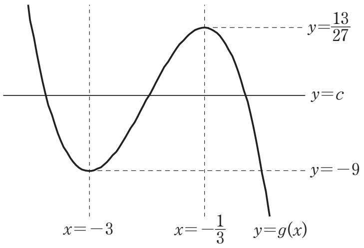
ここで　$t=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+1\geqq 1^2+1\cdot 1+1^2+1=4$　より　$|\alpha-\beta|=\dfrac{1}{t}|p-q|\leqq\dfrac{1}{4}|p-q|$

ゆえに　$|\alpha-\beta|\leqq\dfrac{1}{4}|p-q|$　である．

2　３次式 $f(x)=x^3+5x^2+3x+c$ (c は定数)について次の問いに答えよ．

(1)　$f(x)=0$ が３個の相異なる実数解をもつためには，c の値はどんな範囲になければならないか．

(2)　$f(x)=0$ が３個の相異なる整数解をもつことがあるか．また２個の相異なる整数を解としてもつのはどんな場合か．



(1)　$f(x)=0$ より $-x^3-5x^2-3x=c$

$g(x)=-x^3-5x^2-3x$ とすると，

$g'(x)=-3x^2-10x-3=-(3x+1)(x+3)$

よって，$g(x)$ は極大値　$g\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{13}{27}$

極小値　$g(-3)=-9$ をもつ．

$y=g(x)$ と $y=c$ のグラフの交点が 3 個になるときを考えて，

求める c の範囲は　$\boldsymbol{-9<c<\frac{13}{27}}$

(2)　$f(x)=0$ が異なる 3 実数解をもつとき，その 3 解を α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ とする．

(1)のグラフより，$\alpha<-3$，$-3<\beta<-\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{3}<\gamma$

よって，β が整数のとき $\beta=-2$，-1 に限られる．

$\beta=-2$ のとき　$f(-2)=0$ より　$c=-6$

　このとき　$f(x)=x^3+5x^2+3x-6=(x+2)(x^2+3x-3)$ より，α，γ は整数ではない．

$\beta=-1$ のとき　$f(-1)=0$ より　$c=-1$

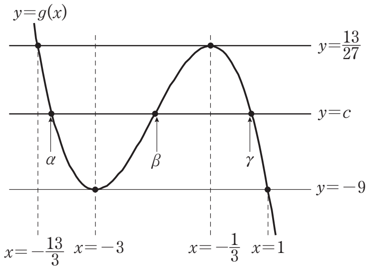
　このとき $f(x)=(x+1)(x^2+4x-1)$　より α，γ は整数ではない．

以上より，$f(x)=0$ が 3 個の相異なる整数解をもつことはない．

$f(x)=0$ が 3 実数解をもつとき，その 3 解を α, β γ $(\alpha\leqq\beta\leqq\gamma)$ とする．

$g(x)=-9$ より　$x=-3,\ 1$

$g(x)=\frac{13}{27}$ より　$x=-\frac{1}{3}$，$-\frac{13}{3}$



グラフより，$-\frac{13}{3}\leqq\alpha\leqq-3$，$-3\leqq\beta\leqq-\frac{1}{3}$，

　$-\frac{1}{3}\leqq\gamma\leqq1$　である．

先の結果より，$\beta=-2$，-1 のときは α，γ は整数ではない．

γが整数のとき $\gamma=0,\ 1$ に限られる．

　$\gamma=0$ のとき　$c=0$　　このとき，$f(x)=x(x^2+5x+3)$ より α は整数ではない．

　$\gamma=1$ のとき　グラフより，$\alpha=\beta=-3$ となり適する．このとき　$c=-9$

以上より，$f(x)=0$ が 2 個の相異なる整数を解としてもつのは　$\boldsymbol{c=-9}$　のときである．

3　関数 $f(x)=x-2+3|x-1|$ を考える．$0\leqq x\leqq2$ の範囲で，関数

$$g(x)=\left|\int_0^x f(t)dt\right|+\left|\int_x^2 f(t)dt\right|$$

の最大値を求めよ．

$$f(x)=x-2+3|x-1|=\begin{cases}-2x+1 & (x\leqq1)\\ 4x-5 & (x\geqq1)\end{cases}$$

(i)　$0\leqq x\leqq1$ のとき

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x(-2t+1)dt=-x^2+x=-x(x-1)$$

$$\int_x^2 f(t)dt=\int_x^1(-2t+1)dt+\int_1^2(4t-5)dt=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

ゆえに　$g(x)=(-x^2+x)+(x^2-x+1)=1$

(ii)　$1 \leqq x \leqq 2$ のとき

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^1(-2t+1)dt+\int_1^x(4t-5)dt=2x^2-5x+3=(x-1)(2x-3)$$

$$\int_x^2 f(t)dt=\int_x^2(4t-5)dt=-2x^2+5x-2=-(2x-1)(x-2)$$

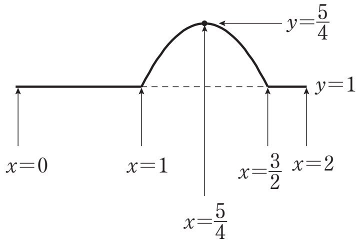
ゆえに　$1 \leqq x \leqq \frac{3}{2}$ のとき

$$g(x)=-(2x^2-5x+3)+(-2x^2+5x-2)=-4x^2+10x-5=-4\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{5}{4}$$

$\frac{3}{2} \leqq x \leqq 2$ のとき

$$g(x)=(2x^2-5x+3)+(-2x^2+5x-2)=1$$

(i)(ii)より，$g(x)$ のグラフの概形は下のようになる．



よって求める最大値は　$\mathbf{\frac{5}{4}}$　$\left(x=\frac{5}{4}\text{ のとき}\right)$

第4講　微分法，積分法②

1　放物線 C：$y=-x^2+2x+1$ と x 軸の共有点を $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(b,\ 0)$ とし，C と直線 $y=mx$ の共有点を $\mathrm{P}(\alpha,\ m\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ m\beta)$，原点を O とする．ただし，$a<b$，$m\neq0$，$\alpha<\beta$ とする．線分 OP，OA と C で囲まれた図形の面積と線分 OQ，OB と C で囲まれた図形の面積が等しいとき，m の値を求めよ．

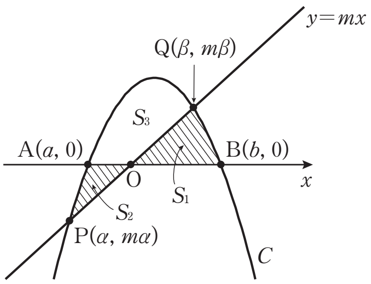
$-x^2+2x+1=0$ の2解が，$x=a$，b $(a<b)$ であるので　$a=1-\sqrt{2}$，$b=1+\sqrt{2}$

また，$-x^2+2x+1=mx$　つまり　$x^2+(m-2)x-1=0$ の2解が，$x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ であるので　$\alpha=\dfrac{2-m-\sqrt{(m-2)^2+4}}{2}$，　$\beta=\dfrac{2-m+\sqrt{(m-2)^2+4}}{2}$

右図のように S_1，S_2，S_3 を定めると，$S_1=S_2$ より $S_1+S_3=S_2+S_3$

$$S_1+S_3=\int_a^b(-x^2+2x+1)dx=-\int_a^b(x-a)(x-b)dx$$

$$=\frac{1}{6}(b-a)^3=\frac{1}{6}\left(2\sqrt{2}\right)^3$$



$$S_2+S_3=\int_\alpha^\beta(-x^2+(2-m)x+1)dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left\{\sqrt{(m-2)^2+4}\right\}^3$$

よって　$\dfrac{1}{6}\left\{\sqrt{(m-2)^2+4}\right\}^3=\dfrac{1}{6}\left(2\sqrt{2}\right)^3$　　$(m-2)^2+4=8$　　$m-2=\pm2$

ゆえに　$\boldsymbol{m=4}$

2　関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+1-|x-1|)$ のグラフが，直線 $x=a$ を軸とする放物線 $y=g(x)$ と2つの点で接している．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　関数 $g(x)$ を求めよ．

(2)　$g(x)$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さを求めよ．

(3)　$f(x)$ のグラフと $g(x)$ のグラフとによって囲まれた図形の面積を求めよ．

(1)　$f(x)=\begin{cases}1\ (x\geqq1)\\ x\ (x<1)\end{cases}$

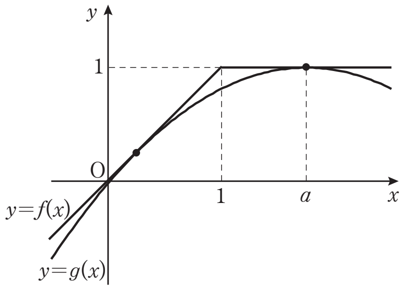
題意より　$g(x)=p(x-a)^2+1\ (a>1)$とおける．

これが$y=x$と接するので

$p(x-a)^2+1=x$　　つまり

$px^2-(2ap+1)x+pa^2+1=0$　……①

が重解をもつ．



$(2ap+1)^2-4p(pa^2+1)=0$　よって　$p=-\dfrac{1}{4(a-1)}$

このとき①は 重解　$x=\dfrac{2ap+1}{2p}=a+\dfrac{1}{2p}=-a+2$　をもつ.

$a>1$より　$-a+2<1$ よって，条件を満たす.　ゆえに　$\boldsymbol{g(x)=-\dfrac{1}{4(a-1)}(x-a)^2+1}$

(2)　$g(x)$のグラフと x 軸との交点の x 座標は

$-\dfrac{1}{4(a-1)}(x-a)^2+1=0$　より　$(x-a)^2=4(a-1)$　　$x=a\pm2\sqrt{a-1}$

よって，求める線分の長さは　$(a+2\sqrt{a-1})-(a-2\sqrt{a-1})=\boldsymbol{4\sqrt{a-1}}$

(3)　求める面積は

$$\int_{-a+2}^{1}\{x-g(x)\}dx+\int_{1}^{a}\{1-g(x)\}dx$$

$$=-p\int_{-a+2}^{1}\{x-(-a+2)\}^2dx-p\int_{1}^{a}(x-a)^2dx$$

$$=-p\left[\frac{1}{3}(x+a-2)^3\right]_{-a+2}^{1}-p\left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_{1}^{a}$$

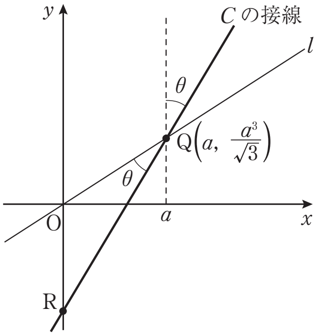
$$=-\frac{p}{3}(a-1)^3+\frac{p}{3}(1-a)^3=-\frac{2}{3}p(a-1)^3=-\frac{2}{3}\left\{-\frac{1}{4(a-1)}\right\}(a-1)^3=\boldsymbol{\frac{1}{6}(a-1)^2}$$

3　原点を通る傾きが正の直線 l を考える．いま点Pが原点から直線 l に沿って第1象限を直進し，直線 l と曲線 $C:y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x^3$ の交点 $\mathrm{Q}\left(a,\ \dfrac{a^3}{\sqrt{3}}\right)$ で反射した後，再び直進する．ただし，点Qにおいて，C の接線に対し，入射角と反射角は等しいとする．反射後の点Pの進行方向が y 軸と平行になるとき，次の問いに答えよ．

(1)　a の値を求めよ．

(2)　点Qにおける接線と曲線 C が囲む図形の面積を求めよ．

(1)　$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x^3$　より　$y'=\sqrt{3}\,x^2$



点Qにおける接線の方程式は　$y=\sqrt{3}\,a^2(x-a)+\dfrac{a^3}{\sqrt{3}}$

つまり　$y=\sqrt{3}\,a^2x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^3$　よって　$\mathrm{R}\left(0,\ -\dfrac{2}{\sqrt{3}}a^3\right)$

△ORQ は二等辺三角形より　OR＝OQ

ゆえに　$\mathrm{OR}^2=\mathrm{OQ}^2$　つまり　$\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}a^3\right)^2=a^2+\dfrac{1}{3}a^6$

$\dfrac{4}{3}a^6=a^2\cdot\dfrac{a^4+3}{3}$　　$4a^4=a^4+3$　　$a^4=1$　　ゆえに　$\boldsymbol{a=1}$

(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{3}}x^3=\sqrt{3}\,x-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　より　$x^3-3x+2=0$　　$(x-1)^2(x+2)=0$　　$x=1,\ -2$

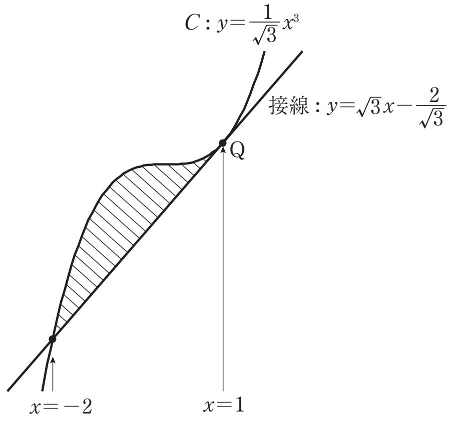
よって，求める面積 S は

$$S=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-2}^{1}(x-1)^2(x+2)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-2}^{1}(x-1)^2\{(x-1)+3\}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-2}^{1}\{(x-1)^3+3(x-1)^2\}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{4}(x-1)^4+(x-1)^3\right]_{-2}^{1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{81}{4}-27\right)=\boldsymbol{\frac{9\sqrt{3}}{4}}$$



第5講　ベクトル

[1] △OAB の辺 OA，AB，BO の各々を $t:1-t$ の比に内分する点をそれぞれ P，Q，R とする．ここで t は $0<t<1$ を満たす実数とする．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|}=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ が t の値によらず成り立つのは△OAB がどのような三角形のときか．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}-t\vec{a}=\boldsymbol{(1-2t)\vec{a}+t\vec{b}}$

$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{-t\vec{a}+(1-t)\vec{b}}$

(2) $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|}=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}=k$ とおくと，$k>0$ であり　$|\vec{b}|=k|\vec{a}|$

また $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ $(0^\circ<\theta<180^\circ)$ とおくと　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=k|\vec{a}|^2\cos\theta$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|(1-2t)\vec{a}+t\vec{b}|^2=(1-2t)^2|\vec{a}|^2+2t(1-2t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$$

$$=|\vec{a}|^2\{(1-2t)^2+2t(1-2t)k\cos\theta+t^2k^2\}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=|-t\vec{a}+(1-t)\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2\{t^2-2t(1-t)k\cos\theta+(1-t)^2k^2\}$$

$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2}{|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2}=k^2$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=k^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2$　これに上の結果を代入し t について整理すると

$$(4-4k\cos\theta-2k^3\cos\theta-k^4)t^2+(-4+2k\cos\theta+2k^3\cos\theta+2k^4)t+1-k^4=0$$

これが $0<t<1$ である t によらず成り立つのは

$4-4k\cos\theta-2k^3\cos\theta-k^4=0$　……①

かつ　$-4+2k\cos\theta+2k^3\cos\theta+2k^4=0$　……②

かつ　$1-k^4=0$　……③　のとき

③より　$(1+k^2)(1+k)(1-k)=0$　　$k>0$ より　$k=1$　よって　$|\vec{a}|=|\vec{b}|$

このとき ①，②はともに $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ となる．よって $\theta=60^\circ$

以上より，題意を満たすのは△OAB が**正三角形**のときである．

2　[1]　点 O を中心とする円を考える．この円の円周上に 3 点 A，B，C があって $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ を満たしている．このとき，三角形 ABC は正三角形であることを証明せよ．

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=R$ とおく．　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$　より　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$

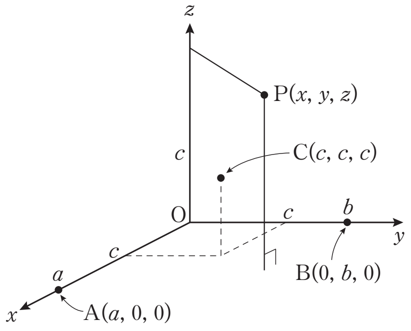
$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2$　　$|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2$　　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\dfrac{1}{2}R^2$

よって $|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2=3R^2$　ゆえに $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}\,R$

同様に　$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{3}\,R$　　よって　$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|$ より，△ABC は正三角形である．

2　[2]　空間に相異なる 4 点 O(0, 0, 0)，A(a, 0, 0)，B(0, b, 0)，C(c, c, c) がある．ただし，a，b は正の数とする．4 点 O，A，B，C からの距離が等しい点 P(x, y, z) が xy 平面に関して C と同じ側（xy 平面上は除く）にあるのは，a，b，c にどのような関係があるときか．

PO＝PA＝PB＝PC より



$x^2+y^2+z^2=(x-a)^2+y^2+z^2$　……①

$x^2+y^2+z^2=x^2+(y-b)^2+z^2$　……②

$x^2+y^2+z^2=(x-c)^2+(y-c)^2+(z-c)^2$　……③

①より　$2ax-a^2=0$　　$a\neq 0$ より　$x=\dfrac{a}{2}$

②より　$2by-b^2=0$　　$b\neq 0$ より　$y=\dfrac{b}{2}$

③より　$2cx+2cy+2cz-3c^2=0$　　$2cz=3c^2-(a+b)c$

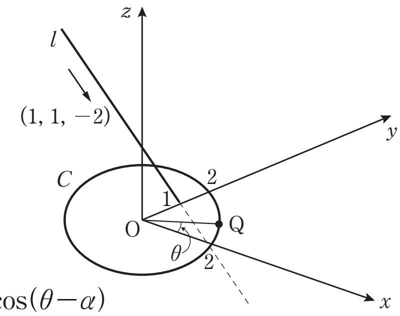
条件より　$cz>0$　　よって　$c\{3c-(a+b)\}>0$　　$a+b>0$ より　$\boldsymbol{c<0,\ \dfrac{a+b}{3}<c}$

3　xyz 空間において，xy 平面上に原点を中心とする半径 2 の円 C がある．また，点 (0, 1, 0) を通りベクトル (1, 1, −2) に平行な直線を l とする．この l 上の動点 P から最短距離にある C 上の点を Q とする．点 P が l の全体を動くとき，点 Q が動く範囲を図示せよ．

$l:(x,\ y,\ z)=(0,\ 1,\ 0)+t(1,\ 1,\ -2)=(t,\ t+1,\ -2t)$　　よって　P(t, $t+1$, $-2t$) と表せる．

また，Q($2\cos\theta$, $2\sin\theta$, 0) とおく．

$$\mathrm{PQ}^2=(2\cos\theta-t)^2+(2\sin\theta-t-1)^2+(2t)^2$$
$$=4\cos^2\theta-4t\cos\theta+t^2+4\sin^2\theta-4(t+1)\sin\theta+(t+1)^2+(2t)^2$$
$$=-4\{(t+1)\sin\theta+t\cos\theta\}+6t^2+2t+5$$



$\sqrt{(t+1)^2+t^2}=\sqrt{2t^2+2t+1}=r$ とおくと

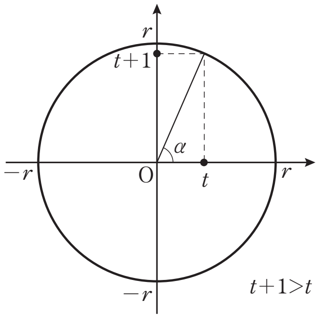
$$(t+1)\sin\theta+t\cos\theta=r\left(\cos\theta\times\frac{t}{r}+\sin\theta\times\frac{t+1}{r}\right)=r\cos(\theta-\alpha)$$

ただし　$\cos\alpha=\dfrac{t}{r}$，$\sin\alpha=\dfrac{t+1}{r}$　$(0\leqq\alpha<2\pi)$

これが最大となるのは　$\cos(\theta-\alpha)=1$

つまり　$\theta-\alpha=0$　より　$\theta=\alpha$のとき

ゆえに　$\mathrm{Q}(2\cos\alpha,\ 2\sin\alpha,\ 0)$



また，$t\neq0$のとき　$\tan\alpha=\dfrac{t+1}{t}=1+\dfrac{1}{t}$

$t>0$のとき

　$\cos\alpha>0$，$\sin\alpha>0$，$\tan\alpha>1$　より　$\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

$t=0$　のとき

$\cos\alpha=0$，$\sin\alpha=1$　より　$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$

$-1<t<0$ のとき

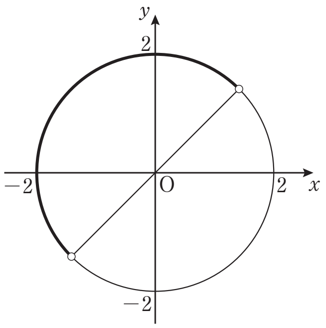
$\cos\alpha<0$，$\sin\alpha>0$，$\tan\alpha<0$ より　$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

$t\leqq-1$ のとき

$\cos\alpha<0$，$\sin\alpha\leqq0$，$0\leqq\tan\alpha<1$ より　$\pi\leqq\alpha<\dfrac{5}{4}\pi$

以上より，α のとりうる値の範囲は　$\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{5}{4}\pi$

よって，点Qの動く範囲は右図太線部分



第6講　数列

> **1**　[1]　数列 $\{a_n\}$ を初項1，公比 r の等比数列とし，数列 $\{b_n\}$ を初項1，公比 s の等比数列とする．第 n 項が $x_n=a_n+b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で与えられる数列 $\{x_n\}$ を考える．
> $x_2=2$，$x_4=14$ のとき，次の問いに答えよ．
> (1)　r，s を求めよ．ただし $r>s$ とする．
> (2)　すべての自然数 n について $x_{n+2}=2x_{n+1}+x_n$ が成り立つことを示せ．

(1)　$a_n=1\cdot r^{n-1}$　$b_n=1\cdot s^{n-1}$　より　$x_n=r^{n-1}+s^{n-1}$

$x_2=2$ より　$r+s=2$　……①

$x_4=14$ より　$r^3+s^3=14$　　よって　$(r+s)^3-3rs(r+s)=14$　　$rs=-1$　……②

①，②より r，s は2次方程式　$t^2-2t-1=0$ の2解 $(r>s)$ である．

ゆえに　$\boldsymbol{r=1+\sqrt{2}}$，$\boldsymbol{s=1-\sqrt{2}}$

(2)　(1)より $r^2-2r-1=0$　よって　$r^{n+1}=2r^n+r^{n-1}$　同様に　$s^{n+1}=2s^n+s^{n-1}$

したがって　$x_{n+2}=r^{n+1}+s^{n+1}=2(r^n+s^n)+(r^{n-1}+s^{n-1})=2x_{n+1}+x_n$　よって示された．

> **1**　[2]　正の整数 a_1，a_2，a_3，a_4 がこの順に等比数列をなし，公比 r が整数でなく，かつ $r>1$ である．このとき，a_4 のとりうる値の最小値とそのときの a_1 を求めよ．

r は正の有理数であることより　$r=\dfrac{q}{p}$　(p，q は互いに素の正の整数）とおける．

$r>1$より　$q>p>0$　　また，r は整数ではないので　$p\geqq 2$　　ゆえに　$q\geqq 3$

このとき　$a_4=a_1\times r^3=a_1\times\dfrac{q^3}{p^3}$　これが整数であることよりa_1はp^3の倍数である．

よって，$a_1=kp^3$（k は正の整数）とおくと

$a_4=kq^3$　これが最小となるのは $k=1$　かつ　$q=3$のときであり，このとき　$p=2$

以上より　a_4の最小値は　**27**　であり，そのときの a_1 は　$\boldsymbol{a_1=8}$

> **2**　数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定め，数列 $\{b_n\}$ を
> $b_1=a_1a_2$，$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}a_{n+2}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定める．
> (1)　一般項 a_n を n を用いて表せ．
> (2)　一般項 b_n を n を用いて表せ．

(1)　数列 $\left\{\dfrac{1}{a_1}\right\}$ は初項3，公差1の等差数列である．

よって　$\dfrac{1}{a_n}=3+(n-1)\cdot 1=n+2$　　ゆえに　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{n+2}}$

(2)　$b_1=a_1\cdot a_2=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$　　$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}a_{n+2}=\dfrac{1}{(n+3)(n+4)}=\dfrac{1}{n+3}-\dfrac{1}{n+4}$

$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right)=\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+3}=\frac{n}{3(n+3)}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ.　　ゆえに　$\boldsymbol{b_n=\dfrac{n}{3(n+3)}}$

3　p，q は正の整数とし，2 次方程式 $x^2-px-q=0$ の 2 つの実数解を α，β とする. $A_n=\alpha^n+\beta^n$ とおくとき，すべての正の整数 n について次のことが成り立つことを示せ.

(1)　A_n は整数である.

(2)　$A_{3n}-{A_n}^3$ は 3 で割り切れる.

---

(1)　$x^2-px-q=0$ の 2 実数解が α，β より，解と係数の関係から　$\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=-q$

このとき「$A_n=\alpha^n+\beta^n$が整数」 ……(＊)　がすべての自然数 n で成り立つことを示す.

[1]　$n=1$ のとき　$A_1=\alpha+\beta=p$

$n=2$ のとき　$A_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=p^2+2q$

p，q は自然数より，$n=1,\ 2$ のとき(＊)は成り立つ.

[2]　$n=k$，$n=k+1$ のときに(＊)が成り立つと仮定する.

つまり　$A_k=\alpha^k+\beta^k$，$A_{k+1}=\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}$　がともに整数であると仮定する.

このとき　$A_{k+2}=\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}=(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})(\alpha+\beta)-\alpha\beta(\alpha^k+\beta^k)=p\cdot A_{k+1}+q\cdot A_k$

よって　$n=k+2$ のときも(＊)が成り立つ.

[1][2]より すべての自然数 n で(＊)が成り立つ.

(2)　$A_{3n}-{A_n}^3=\alpha^{3n}+\beta^{3n}-(\alpha^n+\beta^n)^3$

$=\alpha^{3n}+\beta^{3n}-(\alpha^{3n}+3\alpha^{2n}\beta^n+3\alpha^n\beta^{2n}+\beta^{3n})$

$=-3\alpha^n\beta^n(\alpha^n+\beta^n)$

$=-3(-q)^nA_n$

q は整数であり，かつ(1)より A_nは整数である.

よって　$A_{3n}-{A_n}^3$ は 3 で割り切れる.

第７講　場合の数・確率

> **1**　外観上区別のつかない N 個 $(N \geqq 3)$ の袋が並んでいて，k 番目 $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N)$ の袋には赤球 k 個と白球 $N-k$ 個 が入っている．これらの袋を混ぜ合わせたのち，任意に１つの袋を選定し，選ばれた袋から１球ずつ順に球を取り出す試行について，次の確率を求めよ．
>
> (1)　取り出された球をもとの袋に戻す試行の場合，２回目まで続けて赤球が出る確率．
>
> (2)　取り出された球をもとの袋に戻さない試行の場合，３回目に赤球が出る確率．

(1)　k 番目の袋を選ぶ確率は $\dfrac{1}{N}$，選んだ袋において１回ごとに赤球が出る確率は $\dfrac{k}{N}$

よって，２回目まで赤球が出る確率は　$\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{k}{N}\right)^2=\dfrac{1}{N^3}\cdot k^2$

ゆえに，求める確率は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{N^3}k^2=\frac{1}{N^3}\cdot\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)=\boldsymbol{\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{N}\right)\left(2+\frac{1}{N}\right)}$

(2)　３回目に赤球が出るのは，$k \geqq 3$ のときは，１回目から順に

・赤赤赤　　・赤白赤　　・白赤赤　　・白白赤　　と出る場合．　その確率 p は

$$\frac{k}{N}\cdot\frac{k-1}{N-1}\cdot\frac{k-2}{N-2}+\frac{k}{N}\cdot\frac{N-k}{N-1}\cdot\frac{k-1}{N-2}+\frac{N-k}{N}\cdot\frac{k}{N-1}\cdot\frac{k-1}{N-2}$$
$$+\frac{N-k}{N}\cdot\frac{N-k-1}{N-1}\cdot\frac{k}{N-2}=\frac{k}{N}$$

また，$k=1$ のときは　白白赤で $\dfrac{N-1}{N}\cdot\dfrac{N-2}{N-1}\cdot\dfrac{1}{N-2}=\dfrac{1}{N}$

$k=2$ のときは　赤白赤　白赤赤　白白赤で

$$\frac{2}{N}\cdot\frac{N-2}{N-1}\cdot\frac{1}{N-2}+\frac{N-2}{N}\cdot\frac{2}{N-1}\cdot\frac{1}{N-2}+\frac{N-2}{N}\cdot\frac{N-3}{N-1}\cdot\frac{2}{N-2}=\frac{2}{N}$$

よって　$k \geqq 1$ で $p=\dfrac{k}{N}$ である．

ゆえに，求める確率は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{N}\cdot\frac{k}{N}=\frac{1}{N^2}\cdot\frac{1}{2}N(N+1)=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{N}\right)}$

> **2**　コインを n 回投げて表が出た回数を X_n とする．X_n が３の倍数となる確率を p_n，３で割って２余る確率を q_n とする．次の問いに答えよ．
>
> (1)　p_1，p_2，q_1，q_2 を求めよ．
>
> (2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n を p_{n-1}，q_{n-1} で表せ．
>
> (3)　$n \geqq 4$ のとき，p_n を p_{n-3} で表せ．
>
> (4)　$k \geqq 1$ のとき，p_{3k}，p_{3k+1}，p_{3k+2} をそれぞれ k を用いて表せ．

(1)　コインを１回投げたとき

表が出る回数が３の倍数，すなわち０回出る確率は $\dfrac{1}{2}$　　ゆえに $\boldsymbol{p_1=\dfrac{1}{2}}$

表が出る回数が (3 の倍数) $+2$ であることはない．　　ゆえに $\boldsymbol{q_1=0}$

コインを 2 回投げたとき

表が出る回数が 3 の倍数，すなわち表が 0 回裏が 2 回出る確率を考えて $p_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$

表が出る回数が (3 の倍数) $+2$，すなわち表が 2 回出る確率を考えて $q_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$

(2)　X_n を 3 で割って 1 余る確率は　$1-(p_n+q_n)$

$n\geqq 2$ のとき右図 1 より

$$\boldsymbol{p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{2}q_{n-1}}$$

同じく，右図 2 より

$$q_n=\frac{1}{2}q_{n-1}+\frac{1}{2}\{1-(p_{n-1}+q_{n-1})\}$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{2}}$$

図 1

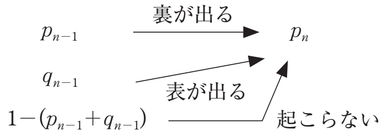
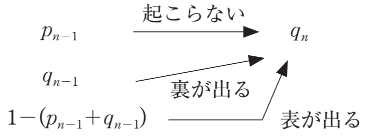


図 2



(3)　(2)より，$n\geqq 4$ のとき

$$p_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}p_{n-2}+\frac{1}{2}q_{n-2}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}p_{n-2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}q_{n-2}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}p_{n-3}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}=\boldsymbol{-\frac{1}{8}p_{n-3}+\frac{3}{8}}$$

(4)　(3)より　$p_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{8}\left(p_{n-3}-\frac{1}{3}\right)$

$$p_3-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{2}q_2-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}$$

ゆえに　$p_{3k}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{8}\right)^{k-1}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{8}\right)^k$

$p_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$　　ゆえに　$p_{3k+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{8}\right)^k$

$p_2-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}$　　ゆえに　$p_{3k+2}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{8}\right)^k$

よって　$\boldsymbol{p_{3k}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{8}\right)^k}$　　$\boldsymbol{p_{3k+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{8}\right)^k}$　　$\boldsymbol{p_{3k+2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{8}\right)^k}$

3　袋の中に赤球が a 個，白球が b 個入っている．この袋から無作為に 1 個の球を取り出し，その色を記録して袋に戻す．この試行をくり返し，同じ色の球が 2 回続けて出るか，または試行の回数が $2N$ に達したとき，試行を止める．ただし，N は 2 以上の一定の自然数とする．この試行がちょうど k 回で終わる確率を $P_k(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2N)$ とし，$p=\frac{a}{a+b}$，$q=\frac{b}{a+b}$，$r=pq$ とおく．

(1)　P_{2l}，$P_{2l+1}\,(l=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N-1)$，および P_{2N} を r を用いて表せ．

(2)　試行の回数の期待値 E は，定数 A，B を用いて $E = \mathrm{A}+\mathrm{B}(r+r^2+\cdots\cdots+r^{N-1})$ と表されることを示し，A，B を求めよ．

1 回の試行で赤球が出る確率は　$\dfrac{a}{a+b}=p$　　　白球が出る確率は　$\dfrac{b}{a+b}=q$

(1)　$2l$ 回目で終了するのは，$2l-2$ 回目まで赤と白が交互に出て，$2l-1$, $2l$ 回目だけ同色が連続するときである．

よって　$P_{2l}=(pq)^{l-1}\cdot p^2+(qp)^{l-1}\cdot q^2=(pq)^{l-1}(p^2+q^2)=\boldsymbol{r^{l-1}(1-2r)}$

$2l+1$ 回目で終了するのは $2l$ 回目まで赤と白が交互に出て，$2l+1$ 回目が $2l$ 回目と同色であるときである．

よって　$P_{2l+1}=(pq)^l\cdot q+(qp)^l\cdot p=(pq)^l(p+q)=\boldsymbol{r^l}$

$2N$回目で終了するのは

・すべて赤と白が交互にでる

・$2N-2$ 回目まで交互，$2N-1$，$2N$ 回目だけ同色が連続

のいずれかである．

よって　$P_{2N}=(pq)^N+(qp)^N+r^{N-1}(1-2r)=\boldsymbol{r^{N-1}}$

(2)　$E=2\cdot P_2+3\cdot P_3+\cdots\cdots+2N\cdot P_{2N}$

$$=\sum_{k=2}^{2N}k\cdot P_k$$

$$=\sum_{l=1}^{N-1}\{2l\cdot P_{2l}+(2l+1)\cdot P_{2l+1}\}+2N\cdot P_{2N}$$

$$=\sum_{l=1}^{N-1}\{2l(r^{l-1}-2r^l)+(2l+1)\cdot r^l\}+2N\cdot r^{N-1}$$

$$=\sum_{l=1}^{N-1}\{2l\cdot r^{l-1}-(2l-1)\cdot r^l\}+2N\cdot r^{N-1}$$

$$=\{2+4r+\cdots\cdots+(2N-2)r^{N-2}\}$$
$$-\{r+3r^2+\cdots\cdots+(2N-5)r^{N-2}+(2N-3)r^{N-1}\}+2N\cdot r^{N-1}$$

$$=2+3(r+r^2+\cdots\cdots+r^{N-2}+r^{N-1})$$

ゆえに　**A＝2, B＝3**

第８講　整数問題

1　[1]　正の整数の組 $(a,\ b)$ で，a 以上 b 以下の整数の総和が 500 となるものをすべて求めよ．ただし，$a<b$ とする．

題意の総和は初項 a，末項 b，項数 $b-a+1\,(>1)$ の等差数列の和である．

ゆえに　$\dfrac{(b-a+1)(a+b)}{2}=500$　　$(a+b)(b-a+1)=2^3\times5^3$

$b+a$ と $b-a+1$ は偶奇を異にする．

また　$(a+b)-(b-a+1)=2a-1>0$　より　$a+b>b-a+1$

さらに　$b-a+1>1$　より

$(a+b,\ b-a+1)=(125,\ 8),\ (40,\ 25),\ (200,\ 5)$

したがって　$(a,\ b)=\mathbf{(59,\ 66),\ (8,\ 32),\ (98,\ 102)}$

1　[2]　自然数の列 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ は等比数列であるとし，

$S=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$

$S'=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5$

$T={a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+{a_4}^2+{a_5}^2$　とおく．

(1)　整数 T は整数 S で割り切れ，その商は S' となることを示せ．

(2)　T が素数となる場合の T の値を求めよ．

(1)　$S=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4=a(1+r+r^2+r^3+r^4)=$(整数)

$S'=a(1-r+r^2-r^3+r^4)=$(整数)

$T=a^2(1+r^2+r^4+r^6+r^8)=$(整数)

$$\begin{aligned}SS'&=a^2(1+r+r^2+r^3+r^4)(1-r+r^2-r^3+r^4)\\&=a^2\{(1+r^2+r^4)^2-(r+r^3)^2\}\\&=a^2(1+r^4+r^8+2r^2+2r^6+2r^4-r^2-2r^4-r^6)\\&=a^2(1+r^2+r^4+r^6+r^8)=T\end{aligned}$$

したがって，整数 T は整数 S で割り切れ，その商は S' となる．

(2)　$T=SS'$ で T が素数のとき

S は 5 以上の自然数より，$S'=1$ かつ S は素数

$S'=1$ より　$a(1-r+r^2-r^3+r^4)=1$

$a=1$　かつ　$1-r+r^2-r^3+r^4=1$

$r(r-1)(r^2+1)=0$　　$r>0$ より　$r=1$

このとき　$\mathbf{T=5}$

2　[1]　どのような負でない 2 つの整数 m と n を用いても $x=3m+5n$ とは表すことができない正の整数 x をすべて求めよ.

$n=0$のとき　$x=3m\geqq 0$ より

0 以上の 3 の倍数はすべて表すことができる.

$n=1$ のとき　$x=3m+5=3(m+1)+2\geqq 5$ より

5 以上の (3 の倍数)$+2$ の形の整数はすべて表すことができる.

$n=2$ のとき　$x=3m+10=3(m+3)+1\geqq 10$ より

10 以上の(3 の倍数)$+1$ の形の整数はすべて表すことができる.

以上より 1，2，4，7 以外のすべての正の整数は表すことがきる.

また，$n\geqq 3$ のとき $x\geqq 15$ よりこの 4 数は表すことができない.

ゆえに，求める正の整数は　$x=$**1，2，4，7**

2　[2]　$10^{2x}\leqq y\leqq 10^{5x}$ と $y\leqq 10^{6-x}$ を同時に満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ.

$10^{2x}\leqq 10^{5x}$ より　$2x\leqq 5x$ ゆえに　$x\geqq 0$

$10^{2x}\leqq 10^{6-x}$ より　$2x\leqq 6-x$　　ゆえに　$x\leqq 2$

これらを同時に満たす y が存在するのは $0\leqq x\leqq 2$ のとき

$x=0$ のとき $\begin{cases}10^0\leqq y\leqq 10^0\\ y\leqq 10^6\end{cases}$　よって　$y=1$　　ゆえに 1 組

$x=1$ のとき $\begin{cases}10^2\leqq y\leqq 10^5\\ y\leqq 10^5\end{cases}$　よって　$10^2\leqq y\leqq 10^5$ ゆえに　$10^5-10^2+1=99901$ 組

$x=2$ のとき $\begin{cases}10^4\leqq y\leqq 10^{10}\\ y\leqq 10^4\end{cases}$　よって　$y=10^4$　　ゆえに 1 組

以上より，求める個数は　$1+99901+1=$ **99903 (個)**

3　どのような自然数 n に対しても $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(ak^2+bk+1)$ が常に n で割り切れるような整数 a, b の組$(a,\ b)$は　$0<a\leqq 6m$　かつ　$0<b\leqq 6m$ (ただし m は自然数) の範囲に全体で何組あるか. その個数を m で表せ.

$S(n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(ak^2+bk+1)$ とおくと

$$S(n)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)a+\frac{1}{2}n(n+1)b+n$$

$$S(2)=5a+3b+2=2(2a+b+1)+a+b$$

これが 2 で割り切れるので，$a+b$ は 2 の倍数

$S(3)=14a+6b+3=3(4a+2b+1)+2a$

これが 3 で割り切れるので，a は 3 の倍数

よって　$a+b=2p$，$a=3q$（p，q は自然数）

つまり　$a=3q$，$b=2p-3q$　であることが必要である．

このとき　$S(n)=\dfrac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)\cdot 3q+3(2p-3q)\}+n=n(n+1)\{p+(n-1)q\}+n$

これは n で割り切れる．

ゆえに　$S(n)$が n で割り切れるとき

$a=3q$，$b=2p-3q$　（p，q は自然数）と表すことができる．

$0<a\leqq 6m$より　$0<3q\leqq 6m$　つまり　$0<q\leqq 2m$

ゆえに　$1\leqq q\leqq 2m$　　よって，q は$2m$通り

$0<b\leqq 6m$より　$0<2p-3q\leqq 6m$　つまり　$\dfrac{3}{2}q<p\leqq 3m+\dfrac{3}{2}q$

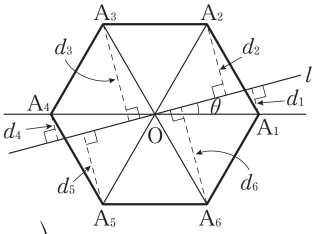
よって，q のそれぞれに対し p は $3m$ 通り存在する．

以上より，求める組数は　$2m\cdot 3m=\boldsymbol{6m^2}$

第9講　総合問題(1)

> **1** 　平面上に，点Oを中心とし点 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6 を頂点とする正六角形がある．Oを通りその平面上にある直線 l を考え，各 A_k と l との距離をそれぞれ d_k とする．このとき $D=d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2+d_4{}^2+d_5{}^2+d_6{}^2$ は l によらず一定であることを示し，その値を求めよ．ただし，$OA_k=r$ とする．

図形の対称性より直線 l と OA_1 のなす角を



θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 60^\circ)$ としても一般性を失わない．

$$d_1=d_4=r\sin\theta$$

$$d_2=d_5=r\sin(60^\circ-\theta)$$

$$=r(\sin60^\circ\cos\theta-\cos60^\circ\sin\theta)=r\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)$$

$$d_3=d_6=r\sin(60^\circ+\theta)=r\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos+\frac{1}{2}\sin\theta\right)$$

ゆえに　$D=2(d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2)=2r^2\left\{\sin^2\theta+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2\right\}$

$$=2r^2\left(\sin^2\theta+\frac{3}{2}\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)=3r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=\boldsymbol{3r^2}=(\text{一定})$$

> **2** 　赤球，白球，青球がそれぞれ a 個，b 個，c 個 $(0<a\leqq b\leqq c)$ 入った箱から2個の球を同時に取り出すことを考える．
>
> (1)　$n=a+b+c$，$s=a^2+b^2+c^2$ とする．取り出した2個の球の色が異なる確率 $P(a,\ b,\ c)$ を n，s を用いて表せ．
>
> (2)　$n=11$ のとき，$P(a,\ b,\ c)$ を最大にする a，b，c と，そのときの $P(a,\ b,\ c)$ の値を求めよ．

(1)　取り出した2個の球の色が異なる場合の数は

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}=\frac{1}{2}(n^2-s)\ (\text{通り})$$

ゆえに　$P(a,\ b,\ c)=\dfrac{ab+bc+ca}{{}_n\mathrm{C}_2}=\boldsymbol{\dfrac{n^2-s}{n(n-1)}}$

(2)　$n=11$のとき　$P(a,\ b,\ c)=\dfrac{121-s}{110}$

また　$a+b+c=11$　$0<a\leqq b\leqq c$であり，a，b，c は整数であることより

$$11=a+b+c\geqq a+a+a=3a$$

$3a\leqq 11$　　ゆえに　$a=1,\ 2,\ 3$に限られる．

$a=1$ のとき　$b+c=10$ より　$10=b+c \geqq b+b=2b$　　ゆえに　$1 \leqq b \leqq 5$

このとき　$s=b^2+c^2+1=b^2+(10-b)^2+1=2b^2-20b+101=2(b-5)^2+51$

よって　$b=5$ のとき最小値 51 をとる．　このとき　$c=5$

$a=2$ のとき　$b+c=9$ より　$9=b+c \geqq 2b$　　ゆえに　$2 \leqq b \leqq 4$

このとき　$s=b^2+c^2+4=b^2+(9-b)^2+4=2b^2-18b+85=2\left(b-\dfrac{9}{2}\right)^2+\dfrac{89}{2}$

よって　$b=4$ のとき最小値 45 をとる．　このとき　$c=5$

$a=3$ のとき　$b+c=8$ より　$8=b+c \geqq 2b$　　ゆえに　$3 \leqq b \leqq 4$

このとき　$s=b^2+c^2+9=b^2+(8-b)^2+9=2b^2-16b+73=2(b-4)^2+41$

よって　$b=4$ のとき最小値 41 をとる．　このとき　$c=4$

以上より s は，$\boldsymbol{a=3}$，$\boldsymbol{b=c=4}$ のとき最小値をとり，このとき　$P(a,\ b,\ c)$ は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{8}{11}}$ をとる．

3　$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対し，2 乗してちょうど n けたの数となる正の整数の個数を $f(n)$ とする．このとき，$f(n+1)>f(n)$ であることを証明せよ．

---

2 乗してちょうど n けたの数となる正の整数を k とすると

$$10^{n-1} \leqq k^2 < 10^n \quad \text{よって} \quad 10^{\frac{n-1}{2}} \leqq k < 10^{\frac{n}{2}}$$

n が奇数のとき　$f(n)=\left[10^{\frac{n}{2}}\right]-10^{\frac{n-1}{2}}+1$

よって　$10^{\frac{n}{2}}-10^{\frac{n-1}{2}}<f(n)<10^{\frac{n}{2}}-10^{\frac{n-1}{2}}+1$　……①

n が偶数のとき　$f(n)=\left(10^{\frac{n}{2}}-1\right)-\left(\left[10^{\frac{n-1}{2}}\right]+1\right)+1=10^{\frac{n}{2}}-\left[10^{\frac{n-1}{2}}\right]-1$

よって　$10^{\frac{n}{2}}-10^{\frac{n-1}{2}}-1<f(n)<10^{\frac{n}{2}}-10^{\frac{n-1}{2}}$　……②

n が整数のとき，①または②より　$10^{\frac{n}{2}}-10^{\frac{n-1}{2}}-1<f(n)<10^{\frac{n}{2}}-10^{\frac{n-1}{2}}+1$

このとき　$10^{\frac{n+1}{2}}-10^{\frac{n}{2}}-1<f(n+1)$

ここで　$10^{\frac{n+1}{2}}-10^{\frac{n}{2}}-1-\left(10^{\frac{n}{2}}-10^{\frac{n-1}{2}}+1\right)$

$=10^{\frac{n+1}{2}}-2\cdot10^{\frac{n}{2}}+10^{\frac{n-1}{2}}-2$

$=10^{\frac{n-1}{2}}\left(10-2\sqrt{10}+1\right)-2$

$\geqq 1\cdot\left(11-2\sqrt{10}\right)-2=9-2\sqrt{10}=\sqrt{81}-\sqrt{40}>0$

よって　$f(n)<f(n+1)$

第 10 講　総合問題(2)

1　$f(x)=\sum_{k=1}^{10}k|x-k|$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$x<1$ のとき，$f'(x)$ の値を求めよ．

(2)　$x>10$ のとき，$f'(x)$ の値を求めよ．

(3)　$1\leqq n\leqq 9$ を満たす整数 n に対し，$n<x<n+1$ における $f'(x)$ の値を求めよ．

$f(x)=\sum_{k=1}^{10}k|x-k|=1\cdot|x-1|+2\cdot|x-2|+3\cdot|x-3|+\cdots\cdots+10\cdot|x-10|$

(1)　$x<1$のとき　$x-k<0$　よって　$f(x)=\sum_{k=1}^{10}k(-x+k)$

ゆえに　$f'(x)=\sum_{k=1}^{10}(-kx+k^2)'=\sum_{k=1}^{10}(-k)=-\frac{10\cdot 11}{2}=\mathbf{-55}$

(2)　$x>10$のとき　$x-k>0$　よって　$f(x)=\sum_{k=1}^{10}k(x-k)$

ゆえに　$f'(x)=\sum_{k=1}^{10}(kx-k^2)'=\mathbf{55}$

(3)　$1\leqq n\leqq 9$ のとき　$f(x)=\sum_{k=1}^{n}k(x-k)+\sum_{k=n+1}^{10}k(-x+k)$

ゆえに　$f'(x)=\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=n+1}^{10}k$

$=\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{(-n+10)(n+1+10)}{2}=\frac{1}{2}(n^2+n+n^2+n-110)$

$=\boldsymbol{n^2+n-55}$

2　平面上において，点 O を始点とする 2 つの半直線を l_1，l_2 とし，それらのなす角は鋭角 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とする．点 A は l_1 上の点で OA＝1，点 B は l_2 上の点で OB＝b とする．次に，直線 AB 上に点 O からおろした垂線と直線 AB の交点を P とする．

(1)　ベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ によりベクトル $\overrightarrow{OP}$ を

$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}$

とするとき，t を b と θ を用いて表せ．

(2)　θ を固定し，b を $b>0$ の範囲で動かすとき，点 P が l_1，l_2 ではさまれる部分（ただし l_1，l_2 も含む）にあるための b の範囲を求めよ．

(3)　b が(2)で求めた範囲で動くとき，点 P の描く軌跡と l_1，l_2 で囲まれる部分の面積を求めよ．

(1)　$|\overrightarrow{OA}|=1$, $|\overrightarrow{OB}|=b$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=b\cos\theta$

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2=b^2-2b\cos\theta+1>0$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より　$\{t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}\}\cdot\overrightarrow{AB}=0$　　$(\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BA})\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}-t|\overrightarrow{AB}|^2=0 \qquad \text{ゆえに}\quad t=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})}{|\overrightarrow{AB}|^2}=\boldsymbol{\frac{b^2-b\cos\theta}{b^2-2b\cos\theta+1}}$$

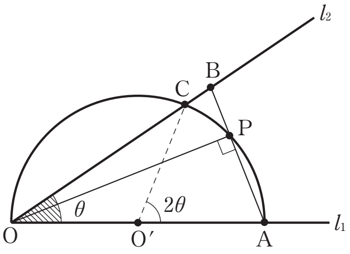
(2)　条件より $0\leqq t\leqq 1$

よって　$0\leqq\dfrac{b^2-b\cos\theta}{b^2-2b\cos\theta+1}\leqq 1$　　$b^2-2b\cos\theta+1>0$ より $\begin{cases} b(b-\cos\theta)\geqq 0 & \cdots\cdots① \\ b\cos\theta\leqq 1 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①において $b>0$ より　$b\geqq\cos\theta$　　②において　$0<\cos\theta<1$ より　$b\leqq\dfrac{1}{\cos\theta}$

ゆえに　$\boldsymbol{\cos\theta\leqq b\leqq\dfrac{1}{\cos\theta}}$

(3)　点Pは $\angle OPA=90^\circ$ を満たしながら動く．
よって，Pは線分OAを直径とする円周上にあり，
(2)より右図弧ACの全体を動く．
$\angle CO'A=2\theta$ より求める面積は，扇形AO′C+△OO′C



よって　$\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot 2\theta+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sin(\pi-2\theta)=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}\theta+\dfrac{1}{8}\sin 2\theta}$

3　不等式 $\{\log_4(x^2+y^2)-\log_8(x^3-y^3)\}\{\log_2 y-\log_4(x^2-2y+y^2)\}>0$ を満たす点 $(x,\ y)$ の存在する範囲を図示せよ．また，その面積を求めよ．

$\log_4(x^2+y^2)-\log_8(x^3-y^3)$　……(i)　　$\log_2 y-\log_4(x^2-2y+y^2)$　……(ii)

真数条件より

$x^2+y^2>0$　よって　$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$

$x^3-y^3>0$　$x,\ y$ は実数より　$x>y$

$y>0$

$x^2-2y+y^2>0$　よって　$x^2+(y-1)^2>1$

ゆえに　$x>y>0$　かつ　$x^2+(y-1)^2>1$　……①

このとき　(i)$=\dfrac{1}{2}\log_2(x^2+y^2)-\dfrac{1}{3}\log_2(x^3-y^3)=\dfrac{1}{6}\{\log_2(x^2+y^2)^3-\log_2(x^3-y^3)^2\}$

ここで

$$(x^2+y^2)^3-(x^3-y^3)^2=x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6-(x^6-2x^3y^3+y^6)$$
$$=x^2y^2(3x^2+2xy+3y^2)>0$$

よって　$(x^2+y^2)^3>(x^3-y^3)^2$　　ゆえに　$\log_2(x^2+y^2)^3>\log_2(x^3-y^3)^2$

つまり　(i)>0 である.

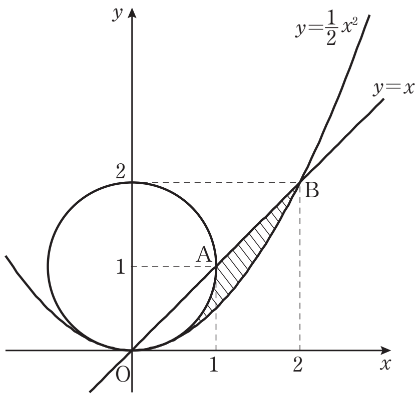
したがって　(ii)>0 を満たす $(x,\ y)$ を求める.

$$\log_2 y-\frac{1}{2}\log_2(x^2-2y+y^2)>0 \qquad \log_2 y^2>\log_2(x^2-2y+y^2) \qquad y^2>x^2-2y+y^2$$

ゆえに　$y>\dfrac{1}{2}x^2$　……②

①，②より求める $(x,\ y)$ の存在範囲は右図斜線部

（境界含まない）



求める面積は

（弓形 OB）－（弓形 OA）

$$=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx-\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot1^2\right)$$

$$=\frac{1}{12}\cdot2^3-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{7}{6}-\frac{\pi}{4}}$$

練習問題解答

第１講　方程式・不等式　　練習問題　解答

1　座標平面上の点 (x, y) が $x^2-2xy+2y^2=4$ を満たして動くとき，次の問いに答えよ．

(1)　$x+y$ の最大値を求めよ．

(2)　$\dfrac{x}{y+4}$ の最大値を求めよ．

解答例

(1)　$x+y=k$ とおくと，$y=k-x$

これを $x^2-2xy+2y^2=4$ に代入して

$$x^2-2x(k-x)+2(k-x)^2=4$$

$$5x^2-6kx+2k^2-4=0 \quad \cdots\cdots①$$

x は実数より，①の判別式を D_1 とすると

$D_1 \geqq 0$ より　$9k^2-5(2k^2-4) \geqq 0$

$k^2 \leqq 20$　　よって　$-2\sqrt{5} \leqq \boldsymbol{k} \leqq 2\sqrt{5}$

← **①を満たす「実数」x が存在するための k の条件を求める**

よって，$x+y$ の最大値は $\boldsymbol{2\sqrt{5}}$

(2)　$\dfrac{x}{y+4}=s$ とおくと，$x=s(y+4)$

これを，$x^2-2xy+2y^2=4$ に代入して

$$s^2(y+4)^2-2ys(y+4)+2y^2=4$$

$$(s^2-2s+2)y^2+8(s^2-s)y+16s^2-4=0 \quad \cdots\cdots②$$

y は実数より，②の判別式を D_2 とすると

$D_2 \geqq 0$ より　$16(s^2-s)^2-(s^2-2s+2)(16s^2-4) \geqq 0$

$3s^2+2s-2 \leqq 0$　　$\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3} \leqq s \leqq \dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$

よって，$\dfrac{x}{y+4}$ の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}}$

※ [　　　] **は授業で触れたポイント．定着しているか確認しよう！**

2　k は -1 でない実数の定数とする．$x+y=k$ であるとき，$x^3+y^3-3xy+1=0$ を満たす実数 x，y が存在するような k の値と，そのときの x，y の値を求めよ．

解答例

「準」公式
$x^3+y^3+z^3-3xyz$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$x^3+y^3+1-3xy=(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y)$ より

$x^3+y^3-3xy+1=0$　から

$$(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y)=0$$

$$(x+y+1)\{(x+y)^2-(x+y)-3xy+1\}=0$$

$$(k+1)(k^2-k-3xy+1)=0$$

$k\neq-1$　であるから

$$k^2-k-3xy+1=0 \qquad \text{ゆえに} \quad xy=\frac{\boldsymbol{k^2-k+1}}{3}$$

これと $x+y=k$　より

解と係数の関係の「逆」
和と積の形が出たら反応できるように．

x，y は２次方程式 $t^2-\boldsymbol{k}t+\dfrac{\boldsymbol{k^2-k+1}}{3}=0$　……①の２解

実数条件より　$k^2-4\cdot\dfrac{k^2-k+1}{3}\geqq0$

$$k^2-4k+4\leqq0$$

ゆえに　$k=\mathbf{2}$

このとき　①は重解 $t=1$ をもつ．

よって　$(x,\ y)=(\mathbf{1},\ \mathbf{1})$

第2講　図形と方程式　　練習問題　解答

1　a は正の実数とし，座標平面上の直線 $l: y=x$ と放物線 $C: y=ax^2$ を考える．C 上の点 $(x,\ y)\left(\text{ただし } 0<x<\dfrac{1}{a}\right)$ で l との距離を最大にする点を $\mathrm{P}(s,\ t)$ とおく．また P と l との距離を d とおく．

(1)　d，s，t をそれぞれ a の式で表せ．また点 P での放物線 C の接線の傾きを求めよ．

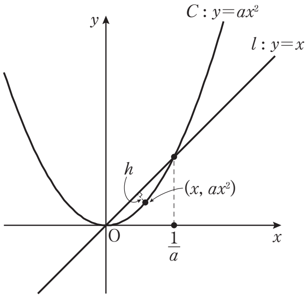
(2)　実数 a を $a>0$ の範囲で動かしたとき，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の軌跡を求め，図示せよ．

解答例

(1)　直線 $l: y=x$ と放物線 $C: y=ax^2$ の交点の x 座標は $x=0,\ \dfrac{1}{a}$ である．

C 上の点 $(x,\ ax^2)$ と直線 $l: x-y=0$ との距離 h は

$0<x<\dfrac{1}{a}$ においては，$x>ax^2$ であることより



絶対値をグラフや条件から「はずす」

$$h=\frac{|x-ax^2|}{\sqrt{2}}=\frac{x-ax^2}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-a\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2+\frac{1}{4a}\right\}$$

である．

$-a<0$ より，$0<x<\dfrac{1}{a}$ において h は $x=\dfrac{1}{2a}$ のとき最大となる．

よって　$\boldsymbol{d=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{4a}=\dfrac{\sqrt{2}}{8a}}$，$\boldsymbol{s=\dfrac{1}{2a}}$，$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{4a}}$

また，$C: y=ax^2$ より　$y'=2ax$

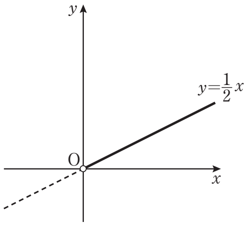
したがって，P における放物線 C の接線の傾きは　$2a\cdot\dfrac{1}{2a}=\boldsymbol{1}$

(2)　軌跡を求める点 P の座標を $(X,\ Y)$ とすると

$X=\dfrac{1}{2a}$ であり，$a>0$ より $X>0$．また，$Y=\dfrac{1}{4a}$ である．

よって，$Y=\dfrac{1}{2}X$ より，求める軌跡は　直線 $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x\ (x>0)}$

図示すると，右図実線部分．



2 不等式 $2y > x+1+3|x-1|$ が表す座標平面上の領域を D とする．実数 a に対して，放物線 C を $y=x^2-2ax+a^2+a+2$ で定める．このとき，C 上の点がすべて D の点となるような a の範囲を求めよ．

解答例

$D:2y > x+1+3|x-1|$ の境界線は $y=\dfrac{x+1+3|x-1|}{2}=\begin{cases}-x+2 & (x<1)\\ 2x-1 & (1\leqq x)\end{cases}$ ……①である．

よって，題意を満たすのは $C:y=x^2-2ax+a^2+a+2=(x-a)^2+a+2$ がすべて①より上側に存在するときである．

グラフの「動き」を「軌跡」から得る

C の頂点は $y=x+2$ 上（右図点線部分）にある．

$x^2-2ax+a^2+a+2=-x+2$ より

$x^2-(2a-1)x+a^2+a=0$ ……②

この方程式の判別式を D_1 とすると

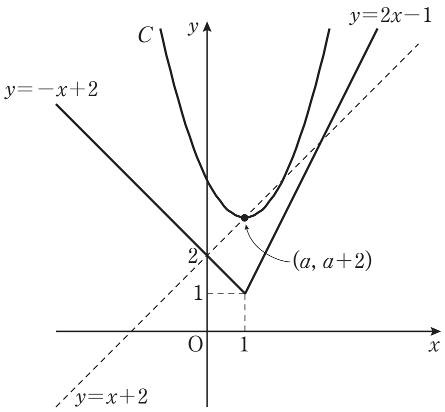
$D_1=(2a-1)^2-4(a^2+a)=-8a+1$

$x^2-2ax+a^2+a+2=2x-1$ より

$x^2-2(a+1)x+a^2+a+3=0$ ……③

この方程式の判別式を D_2 とすると

$\dfrac{D_2}{4}=(a+1)^2-(a^2+a+3)=a-2$



②が重解をもつのは　$D_1=0$　つまり　$a=\dfrac{1}{8}$ のとき

このとき，$D_2<0$ より D の境界線と C は接点以外の共有点をもたない．

③が重解をもつのは　$D_2=0$　つまり　$a=2$ のとき

このとき，$D_1<0$ より D の境界線と C は接点以外の共有点をもたない．

以上より，グラフから求める a の範囲は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{8}<a<2}$

ただし，直線の傾き具合からこちらは明らかである．グラフから判断が困難な状況では「調べた」という事実を解答に残すことを心がけること．

第３講　微分法，積分法①　　練習問題　解答

1　３次関数$f(x)=x^3-3x^2-4x+k$について，次の問いに答えよ．ただし，kは定数とする．

(1)　$f(x)$が極値をとるときのxを求めよ．

(2)　方程式$f(x)=0$が異なる３つの整数解をもつとき，kの値およびその整数解を求めよ．

解答例

(1)　$f'(x)=3x^2-6x-4$　　$f'(x)=0$となるxは　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{3}$

$y=f'(x)$のグラフより，このxの前後で$f'(x)$の正負が変わり，確かに$f(x)$は極値をもつ．

ゆえに　$\boldsymbol{x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{3}}$

(2)　$f(x)=0$が異なる３つの実数解α，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$をもつとき，

(1)より $\dfrac{3-\sqrt{21}}{3}<\beta<\dfrac{3+\sqrt{21}}{3}$　← **解の取り得る値の範囲をグラフより出す**

よって，βが整数のとき，それは0，1，2に限られる．

$\beta=0$のとき

$f(0)=0$より$k=0$

このとき　$f(x)=x(x+1)(x-4)$より　$\alpha=-1$，$\gamma=4$

よって，α，γは整数解である．

$\beta=1$のとき

$f(1)=0$より　$k=6$

このとき　$f(x)=(x-1)(x^2-2x-6)$　より　$\alpha=1-\sqrt{7}$，$\gamma=1+\sqrt{7}$

> 「組立除法」による因数分解は確実であろうか？ 解がわかっているときはもちろん「解が不明で試行錯誤する」ときにはかなりの有効打となろう．

よって，α，γは整数とならず不適．

$\beta=2$のとき

$f(2)=0$　より　$k=12$

このとき　$f(x)=(x-2)(x+2)(x-3)$より　$\alpha=-2$，$\gamma=3$

よってα，γは整数解である．

以上より，求める，kの値およびその整数解は

$k=0$のとき$x=-1$，0，4　　$k=12$のとき$x=-2$，2，3

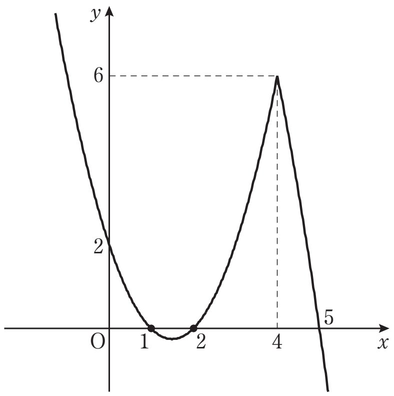
$\boxed{2}$ $f(x)=-(x+1)|x-4|+6$ とし，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ とする．

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフをかきなさい．

(2)　$F(x)$ を計算しなさい．

(3)　$0\leqq x\leqq 6$ における関数 $F(x)$ の最大値を求めなさい．

(1)　$f(x)=\begin{cases}-(x+2)(x-5) & (x\geqq 4)\\ (x-1)(x-2)=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4} & (x\leqq 4)\end{cases}$



よって，$y=f(x)$ のグラフは右図．

(2)　$x\leqq 4$ のとき

$$F(x)=\int_0^x (t^2-3t+2)dt$$
$$=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^x=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x$$

$x\geqq 4$ のとき

$$F(x)=\int_0^4 (t^2-3t+2)dt+\int_4^x (-t^2+3t+10)dt$$
$$=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^4+\left[-\frac{t^3}{3}+\frac{3}{2}t^2+10t\right]_4^x$$
$$=\frac{64}{3}-24+8-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+10x-\left(-\frac{64}{3}+24+40\right)$$
$$=-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+10x-\frac{112}{3}$$

以上より　$F(x)=\begin{cases}\boldsymbol{\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+2x} & \boldsymbol{(x\leqq 4)}\\ \boldsymbol{-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}x^2+10x-\dfrac{112}{3}} & \boldsymbol{(x\geqq 4)}\end{cases}$

「積分」＝「符号つき面積」と考えれば自明．

(3)　$y=f(x)$ のグラフより，$F(x)$ は $x=5$のとき最大となる．

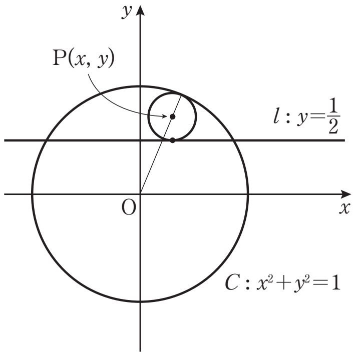
よって，求める最大値は　$F(5)=-\dfrac{125}{3}+\dfrac{75}{2}+50-\dfrac{112}{3}=\boldsymbol{\dfrac{17}{2}}$

第４講　微分法，積分法②　　練習問題　解答

1　円 $x^2+y^2=1$ を C とし，直線 $y=\dfrac{1}{2}$ を l とする．C に内接し l に接する円の中心をPとする．Pの軌跡のうち y 座標が $\dfrac{1}{2}$ より大きい部分と l によって囲まれる図形の面積を求めよ．

解答例

l に接する円の中心をP$(x,\ y)$ とすると，



半径は $\left|y-\dfrac{1}{2}\right|$ と表すことができる．

この円が円 C に内接することより

$$\sqrt{x^2+y^2}=1-\left|y-\frac{1}{2}\right|$$

$y>\dfrac{1}{2}$ の部分では　$\left|y-\dfrac{1}{2}\right|=y-\dfrac{1}{2}$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{3}{2}-y$$

$$x^2+y^2=\left(\frac{3}{2}-y\right)^2$$

よって　$y=-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{3}{4}$　これがPの軌跡の方程式

$y>\dfrac{1}{2}$ より　$-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{3}{4}>\dfrac{1}{2}$　よって　Pは　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　の部分を動く．

したがって，点Pの軌跡と l によって囲まれる図形の面積は

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}\right\}dx$$

$$=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{3}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\sqrt{3})^3\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

積分範囲が y 軸対称であることを利用し，偶関数・奇関数の性質から

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}\right\}dx$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}\right)dx$$

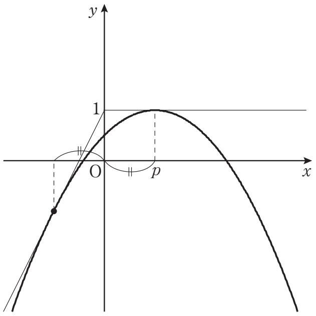
$$=2\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{4}x\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

という解法もあり．

2 xy 平面において，放物線 $y=ax^2+bx+c$ が曲線 $y=x-|x|+1$ と異なる2点で接しているとする．放物線 $y=ax^2+bx+c$ と曲線 $y=x-|x|+1$ および2直線 $x=-1$，$x=1$ によって囲まれた図形の面積の最小値を求めよ．

解答例



$$y=x-|x|+1=\begin{cases}1 & (x\geqq 0)\\ 2x+1 & (x<0)\end{cases}\quad\cdots\cdots①$$

$y=1$ と $y=ax^2+bx+c$　……②　が接することより

②は $y=a(x-p)^2+1$　$(a<0,\ p>0)$　……②′とおける．

また，②′で　$y'=2a(x-p)$

$$2a(x-p)=2 \text{ とすると}\quad x=p+\frac{1}{a}$$

このとき，②と $y=2x-1$ が接するのは y 座標が一致するときである．

つまり　$a\left(p+\dfrac{1}{a}-p\right)^2+1=2\left(p+\dfrac{1}{a}\right)+1$　　$p=-\dfrac{1}{2a}$ のとき．

よって，②′は　$y=a\left(x+\dfrac{1}{2a}\right)^2+1$　と表すことができる．

①と②′，および2直線 $x=-1$，$x=1$ によって囲まれた図形の面積 S は

$$S=\int_{-1}^{0}\left\{2x+1-a\left(x+\frac{1}{2a}\right)^2-1\right\}dx+\int_{0}^{1}\left\{1-a\left(x+\frac{1}{2a}\right)^2-1\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\left\{-a\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2\right\}dx+\int_{0}^{1}\left\{-a\left(x+\frac{1}{2a}\right)^2\right\}dx$$

$$=\left[-\frac{a}{3}\left(x-\frac{1}{2a}\right)^3\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{a}{3}\left(x+\frac{1}{2a}\right)^3\right]_{0}^{1}$$

講義で扱った問題と異なり，「接点」が積分範囲の端点とはなっていないため，計算は若干煩雑となっている．

$$=-\frac{a}{3}\left(-\frac{1}{2a}\right)^3+\frac{a}{3}\left(-1-\frac{1}{2a}\right)^3-\frac{a}{3}\left(1+\frac{1}{2a}\right)^3+\frac{a}{3}\left(\frac{1}{2a}\right)^3$$

$$=-\frac{2}{3}a-\frac{1}{2a}-1$$

$a<0$ のとき　$S\geqq 2\sqrt{\left(-\dfrac{2}{3}a\right)\left(-\dfrac{1}{2a}\right)}-1=\dfrac{2}{\sqrt{3}}-1$　　「相加平均≧相乗平均」

等号成立は　$-\dfrac{2}{3}a=-\dfrac{1}{2a}$　　つまり　$a=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　のとき

よって，$a=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき　S の最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-1}$

第５講　ベクトル　　練習問題　解答

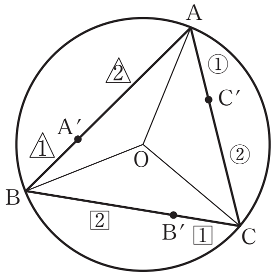
1　点Oを中心とし，半径がrである円に内接する△ABCについて，3辺AB，BC，CAをそれぞれ2：1に内分する点をA′，B′，C′とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおく．次の問いに答えよ．

(1)　rと内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を用いて$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}|^2$を表せ.

(2)　3点A′，B′，C′を通る円の中心が点Oと一致するとき，△ABCが正三角形であることを示せ.

解答例

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b})$



$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}|^2=\dfrac{1}{9}|\vec{a}+2\vec{b}|^2=\dfrac{1}{9}(|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{9}(5r^2+4\vec{a}\cdot\vec{b})}$

(2)　(1)と同様に

$|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}|^2=\dfrac{1}{9}(5r^2+4\vec{b}\cdot\vec{c})$　　$|\overrightarrow{\mathrm{OC'}}|^2=\dfrac{1}{9}(5r^2+4\vec{c}\cdot\vec{a})$

3点A′，B′，C′を通る円の中心が点Oと一致するとき　$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC'}}|$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$

また　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=2r^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

同様に　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=2r^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}$　　$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2=2r^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2$　　ゆえに　AB＝BC＝CA

よって，△ABCは正三角形である.

2　座標空間で次の８つの点

A$(-1,\ 1,\ 2)$，B$(-1,\ -1,\ 2)$，C$(1,\ -1,\ 2)$，D$(1,\ 1,\ 2)$

E$(-1,\ 1,\ 0)$，F$(-1,-1,0)$，G$(1,\ -1,\ 0)$，H$(1,\ 1,\ 0)$

を頂点とする１辺の長さ２の立方体 ABCD−EFGH を考える．

いま，点 P$(x,\ y,\ 0)$ を正方形 EFGH 内の点（辺上も含む，ただし P$\neq$G）とし，点 A と点 G を通る直線を l とする．

(1)　点 Q を直線 l 上の点で $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AG}}$（$t$ は実数）を満たすものとする．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ が直交するとき t を x と y で表せ．

(2)　点 P から直線 l に下ろした垂線の足は点 A と点 G の間にあることを証明せよ．

(3)　点 P が原点 O$(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする xy 平面上の半径１の円周上を動くとし，P の座標を $(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ $(0\leqq\theta\leqq2\pi)$ と書くことにする．このとき，三角形 APG の面積の最大値と最小値，およびそれらを与える θ の値を求めよ．

解答例

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=(2,\ -2,\ -2)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AG}}=(2t,\ -2t,\ -2t)$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x+1,\ y-1,\ -2)$ より

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(2t-x-1,\ -2t-y+1,\ -2t+2)$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}=2(2t-x-1)-2(-2t-y+1)-2(-2t+2)=0$

ゆえに　$\boldsymbol{t=\dfrac{x-y+4}{6}}$

(2)　点 P は正方形 EFGH 内の点であることより，$-1\leqq x\leqq1$，$-1\leqq y\leqq1$

よって　$-2\leqq x-y\leqq2$ より　$\dfrac{1}{3}\leqq t\leqq1$　　つまり，(1)の点 Q は線分 AG 上にある．

点 Q は点 P から直線 l に下ろした垂線の足であることより，題意は示された．

(3)　△APG の面積 S は　$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AG}}||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\sqrt{3}\,|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=-\frac{1}{3}(2x+y-1,\ x+2y+1,\ x-y-2)$$
$$=-\frac{1}{3}(\sin\theta+2\cos\theta-1,\ 2\sin\theta+\cos\theta+1,\ -\sin\theta+\cos\theta-2)$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\frac{1}{9}\{(\sin\theta+2\cos\theta-1)^2+(2\sin\theta+\cos\theta+1)^2+(-\sin\theta+\cos\theta-2)^2\}$$
$$=\frac{2}{3}(\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta\cos\theta+2)$$

$\sin\theta-\cos\theta=t$ とおくと　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{-t^2+1}{2}$　　また　$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ より

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\frac{2}{3}\left(\frac{-t^2+1}{2}+t+2\right)=-\frac{1}{3}(t-1)^2+2$$

よって，S は $t=1$ つまり，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \pi}$ のとき，最大値　$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

$t=-\sqrt{2}$　つまり　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{7}{4}\pi}$ のとき，

最小値　$\sqrt{3}\cdot\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3}}=\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\sqrt{2}-1}$ をとる．

第6講　数列　　練習問題　解答

1 (1) 整数からなる公差1の等差数列 a, b, c, d で $a^3+b^3+c^3=d^3$ を満たすものを求めよ.

(2) 0でない整数からなる等比数列 a, b, c, d で $a^3+b^3+c^3=d^3$ を満たすものは存在しないことを示せ.

解答例

対称性を考慮した置き方である.

(1) 題意より $a=b-1$, $c=b+1$, $d=b+2$ とおくことができる.

$a^3+b^3+c^3=d^3$ より　$(b-1)^3+b^3+(b+1)^3=(b+2)^3$

$b^3-3b^2-3b-4=0$　　$(b-4)(b^2+b+1)=0$

$b^2+b+1=\left(b+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$　より　$b=4$

よって　$\boldsymbol{a=3,\ b=4,\ c=5,\ d=6}$

(2) 公比を $r(\neq 0)$ とすると, $b=ar$, $c=ar^2$, $d=ar^3$ とおくことができる.

ここで a, b, c, d は整数より, r は有理数である.

$a^3+b^3+c^3=d^3$を満たすものがあると仮定すると

$a^3+a^3r^3+a^3r^6=a^3r^9$

$a\neq 0$ より　$r^9-r^6-r^3-1=0$

$r^3=t$ とおくと　$t^3-t^2-t-1=0$

正負が不明であるため, n の符号については言及していない.

r は有理数より t も有理数

よって　$t=\frac{n}{m}$ (n, m は互いに素の整数. $m>0$) とおくことができる.

このとき　$\left(\frac{n}{m}\right)^3-\left(\frac{n}{m}\right)^2-\frac{n}{m}-1=0$

$n^3=m(n^2+mn+m^2)$

m と n は互いに素より　$m=1$

よって　$n^3=n^2+n+1$

$n(n^2-n-1)=1$　……①

「積の形」に持ち込むのは整数問題の基本手法である.

n は整数より　$n=1$　または　$n=-1$　　ところがこのいずれも①を満たさず矛盾.

したがって, 背理法により題意は示された.

2 数列 $\{a_n\}$ は，すべての正の整数 n に対して $0 \leqq 3a_n \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k$ を満たしているとする．このとき，すべての n に対して $a_n=0$ であることを示せ．

解答例

$0 \leqq 3a_n \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k$ ……① がすべての正の整数 n で成り立つとき

「すべての正の整数 n で $a_n=0$」……②であることを示す．

〔Ⅰ〕 $n=1$ のとき

①より $0 \leqq 3a_1 \leqq a_1$

$0 \leqq 3a_1$ より $a_1 \geqq 0$ 　$3a_1 \leqq a_1$ より $a_1 \leqq 0$ 　よって $a_1=0$

よって，②は成り立つ．

〔Ⅱ〕 $n \leqq i$（i は自然数）を満たすすべての正の整数 n で②が成り立つと仮定する．

ある１つの項で成り立つことの仮定ではなく，それまでのすべての項で成り立つことを仮定する．

$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_i=0$

$n=i+1$ のときを考える

①で $n=i+1$ のとき

$$0 \leqq 3a_{i+1} \leqq \sum_{k=1}^{i+1} a_k = a_1+a_2+\cdots\cdots+a_i+a_{i+1}=a_{i+1}\text{（仮定より）}$$

したがって $0 \leqq 3a_{i+1} \leqq a_{i+1}$ 　〔Ⅰ〕同様 $a_{i+1}=0$

よって，$n=i+1$ のときも②は成り立つ．

〔Ⅰ〕〔Ⅱ〕より，すべての正の整数 n に対して $a_n=0$ である．

第 7 講　場合の数・確率　　練習問題　解答

1　2 つの袋があって，そのどちらにも赤球 1 つ，白球 1 つの計 2 個ずつの球が入っている．両方の袋から無作為に球を 1 つずつ取り出して入れ替える．この操作を n 回引き続いて行ったとき，はじめのように各袋に赤球と白球が 1 つずつ入っている確率を p_n とする．

(1)　$n \geqq 2$ として，p_{n-1} と p_n との関係式を求めよ．

(2)　p_n を求めよ．

解答例

(1)　n 回目の操作ではじめの状態となるのは

・$n-1$ 回目の操作を行ってはじめの状態にあり，
　その次の操作で 2 つの袋の同色の球どうしを交換するとき

・$n-1$ 回目の操作を行ってそれぞれの袋に同色の球が入っているとき
　（次の操作後は必ずはじめの状態に戻る）

のいずれか．

状態の遷移がわかる記述または図を描くとよい．

$$p_n = p_{n-1} \times \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 1}{2^2} + (1 - p_{n-1}) \times 1$$

ゆえに　$\boldsymbol{p_n = -\frac{1}{2}p_{n-1} + 1}$

(2)　$p_0 = 1$ と考えることができる．

「はじめの状態」＝第「0」回目

(1)より　$p_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_{n-1} - \frac{2}{3}\right)$，$p_0 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

よって　$p_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

ゆえに　$p_n = \boldsymbol{\frac{1}{3}\left\{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$

> **2**　表が出る確率が $p\,(0<p<1)$ のコイン３枚を同時に投げたとき，表と裏が出る事象をA，少なくとも１枚が表である事象をBとする．次の問いに答えよ．
> (1)　事象 $A\cap B$，$A\cup B$ および $\overline{A}\cap B$ の確率を求めよ．
> (2)　$(A\cap B)\cup(\overline{A\cup B})$ は表と裏がどのように出る事象かを答え，その確率を求めよ．
> (3)　表１枚につき k 点もらえるとする．得点の期待値が $6p$ のとき，k の値を求めよ．

解答例

(1)　３枚のコインの表裏に関して

事象A：(２枚表，１枚裏)　または　(１枚表，２枚裏)

事象B：３枚表　または　(２枚表，１枚裏)　または　(１枚表，２枚裏)

である．

事象 $A\cap B$ は事象Aと等しい．

その確率は　${}_3C_2p^2(1-p)+{}_3C_1p(1-p)^2=\boldsymbol{3p(1-p)}$

事象 $A\cup B$ は事象Bと等しい．

その確率は　$1-(1-p)^3=p^3-3p^2+3p=\boldsymbol{p(p^2-3p+3)}$

事象 $\overline{A}\cap B$ は３枚表のとき．

その確率は　$\boldsymbol{p^3}$

(2)　$(A\cap B)\cup(\overline{A\cup B})$ は(1)より，$A\cup\overline{B}$ と等しい．つまり

(２枚表，１枚裏)　または　(１枚表，２枚裏)　または　３枚裏

のときであり，それは少なくとも１枚は裏が出ることである．

よって求める確率は　$\boldsymbol{1-p^3}$

(3)　r 枚表，$3-r$ 枚裏が出る確率は

${}_3C_r\,p^r(1-p)^{3-r}$ である．

よって，題意の期待値 E は

$$E=\sum_{r=0}^{3}rk\times{}_3C_r\,p^r(1-p)^{3-r}$$
$$=k\cdot{}_3C_1\,p(1-p)^2+2k\cdot{}_3C_2\,p^2(1-p)+3k\cdot p^3$$
$$=3kp$$

期待値の値を出すためにΣで立式することは，１つずつ値が変化する問題では有効である．Σの公式が利用できるときもある．

$E=6p$ となるのは　$\boldsymbol{k=2}$　のとき．

第８講　整数問題　　練習問題　解答

1　２つの整数の平方の和で表される整数の集合を A とする．以下の問いに答えよ．

(1)　集合 A のある要素 a^2+b^2 (a, b は整数)が３で割り切れるとき，a, b はともに３で割り切れることを示せ．

(2)　x を整数とする．$9x$ が集合 A の要素であるとき，x は集合 A の要素であることを示せ．

解答例

(1)　ある自然数 n を３で割った余りは０，１，２のいずれかである．　← 剰余による分類

よって，n^2 を３で割った余りは０，１のいずれかである．

したがって，a^2+b^2 が３で割りきれるのは a^2, b^2 を３で割った余りがともに０のときのみである．

このとき，a, b はともに３で割り切れる．

よって，題意は示された．

> n が整数のとき，
> n^2 がある数の倍数ならば n もその数の倍数である（背理法より自明）．

(2)　$9x$ が集合 A の要素であるとき

$9x=a^2+b^2$　と表すことができる．

よって，a^2+b^2 は９の倍数すなわち３の倍数であり，このとき，(1)より，a, b はともに３で割り切れる．

よって　$a=3p$, $b=3q$　(p, q は整数)　とおくと，

$9x=9p^2+9q^2$

$x=p^2+q^2$

よって，x は集合 A の要素であり，題意は示された．

[2] 2次の多項式 $f(x)$ の係数はいずれも負でない整数であり，$f(1)=15$，$f(2)=33$ であるとする．さらに，自然数 n に対して $f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)$ はつねに n で割り切れるものとする．このような $f(x)$ をすべて求めよ．

解答例

$f(x)=ax^2+bx+c$（a は自然数，b，c は0以上の整数）とおく．

$f(1)=a+b+c=15$

$f(2)=4a+2b+c=33$

これらより，$b=-3a+18$，$c=2a-3$

$b\geqq 0$ より　$-3a+18\geqq 0$　　$a\leqq 6$

$c\geqq 0$ より　$2a-3\geqq 0$　　$a\geqq \dfrac{3}{2}$

よって　$\dfrac{3}{2}\leqq a\leqq 6$　つまり　$2\leqq a\leqq 6$

このとき

$$\begin{aligned}
&f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)\\
&=\sum_{k=1}^{n}f(k)\\
&=\sum_{k=1}^{n}(ak^2+bk+c)\\
&=a\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(-3a+18)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+(2a-3)\cdot n\\
&=n\left\{\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)a-\frac{3}{2}(n+1)a+9(n+1)+2a-3\right\}\\
&=n\left\{\frac{1}{3}(n+1)(n-4)a+2a+9n+6\right\}
\end{aligned}$$

これが常に n で割り切れるのは a が3の倍数のときである．

よって　$a=3,\ 6$

ゆえに，求める $f(x)$ は

$f(x)=3x^2+9x+3$，$f(x)=6x^2+9$

第９講　総合問題(1)　　練習問題　解答

> 1　$|\cos^2 x + a\sin x + b| \leqq 3$ がすべての実数 x について成り立つような，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ．

解答例

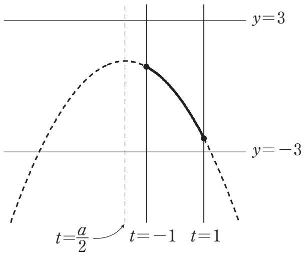
$\sin x = t$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq 1$

このとき　$|\cos^2 x + a\sin x + b| \leqq 3$　……①　は

$|1 - t^2 + at + b| \leqq 3$　つまり　$-3 \leqq -t^2 + at + b + 1 \leqq 3$　……②　と変形できる．

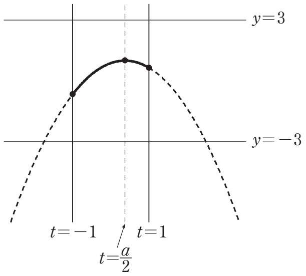
①がすべての実数 x で成り立つ条件は，②が $-1 \leqq t \leqq 1$ のすべての実数 t で成り立つ条件である．

$f(t) = -t^2 + at + b + 1 = -\left(t - \dfrac{a}{2}\right)^2 + \dfrac{a^2}{4} + b + 1$ とおく．



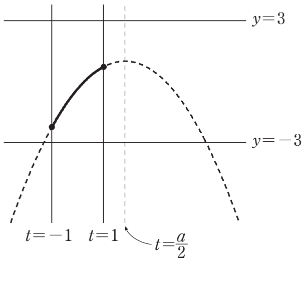
$\dfrac{a}{2} < -1$　つまり　$a < -2$ のとき

$\begin{cases} f(-1) \leqq 3 \\ f(1) \geqq -3 \end{cases}$　よって　$\begin{cases} b \leqq a + 3 \\ b \geqq -a - 3 \end{cases}$



$-1 \leqq \dfrac{a}{2} \leqq 1$　つまり　$-2 \leqq a \leqq 2$のとき

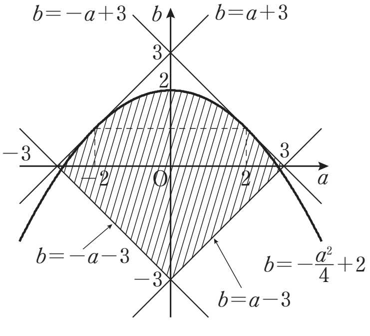
$\begin{cases} f\left(\dfrac{a}{2}\right) \leqq 3 \\ f(1) \geqq -3 \\ f(-1) \geqq -3 \end{cases}$　よって　$\begin{cases} b \leqq -\dfrac{a^2}{4} + 2 \\ b \geqq -a - 3 \\ b \geqq a - 3 \end{cases}$



$1 < \dfrac{a}{2}$　つまり　$2 < a$とき

$\begin{cases} f(-1) \geqq -3 \\ f(1) \leqq 3 \end{cases}$　よって　$\begin{cases} b \geqq a - 3 \\ b \leqq -a + 3 \end{cases}$

以上より，点 $(a,\ b)$ の存在範囲は，下図斜線部分（境界含む）



2 xyz 空間内の 3 点P(0, 0, 1)，Q(0, 0, −1)，R(t, t^2-t+1, 0)を考える．
t が $0 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，三角形PQR が通過してできる立体を K とする．以下の問いに答えよ．

(1) K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ．

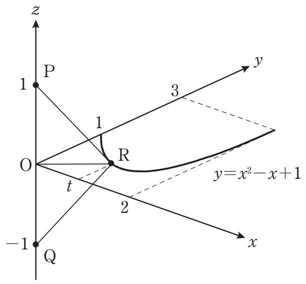
(2) K の体積を求めよ．

解答例

(1) 点 R が xy 平面に描く軌跡は

$$y = x^2 - x + 1 \quad (0 \leqq x \leqq 2) \quad \cdots\cdots①$$

求める断面は，①上の点と (0, 0) を結ぶ線分が描く領域である．



①において　$y' = 2x - 1$

よって，①の $x = t$ における接線の方程式は

$$y = (2t-1)(x-t) + t^2 - t + 1 \quad つまり \quad y = (2t-1)x - t^2 + 1$$

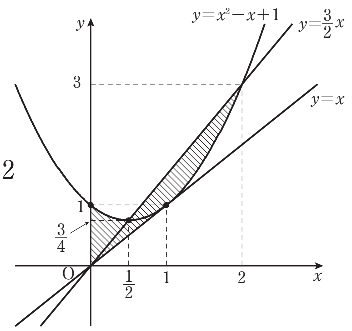
これが原点を通るときは　$-t^2 + 1 = 0$　つまり　$t = 1$　のとき

このときの接線の方程式は　$y = x$

また，原点を通り (2, 3) を通る直線は　$y = \dfrac{3}{2}x$

この直線と①との交点の x 座標は

$$\frac{3}{2}x = x^2 - x + 1 \quad より \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0 \qquad x = \frac{1}{2},\ 2$$



したがって，K を xy 平面で切ったときの断面は右図斜線部分．ただし境界含む．

よって求める面積 S は

$$S = \int_0^1 \{(x^2-x+1) - x\}dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \left\{\frac{3}{2}x - (x^2-x+1)\right\}dx$$

$$= \int_0^1 (x-1)^2\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1 + \frac{1}{6}\left(2 - \frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{9}{16}$$

$$= \mathbf{\frac{43}{48}}$$

(2) K は錐体であることを考慮し，求める体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot 1 \times 2 = \mathbf{\frac{43}{72}}$$

第10講　総合問題(2)　　練習問題　解答

1　実数 x に対して，x を越えない最大の整数を $[x]$ で表す．
$a_m=[\sqrt{m}]$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ に対して，数列 b_1，b_2，b_3，$\cdots\cdots$ を，$b_1=0$，$k\geqq 2$ のとき $a_m<k\leqq a_{m+1}$ となる m に対して $b_k=m$ と定める．次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{b_k\}$ の一般項を求めよ．

(2) すべての自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2}a_m+\sum_{k=1}^{n}b_k=n^3$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2}[\sqrt{m}]$ を求めよ．

解答例

(1) $b_k=m$ となる m は　$a_m<k\leqq a_{m+1}$

つまり　$[\sqrt{m}]<k\leqq[\sqrt{m+1}]$ を満たす m によって定まる．

k は整数より　$\sqrt{m}<k\leqq\sqrt{m+1}$

ガウスは「整数部分だけ」を取り出すもの．ガウスを取り除いても考える範囲（「整数」）に影響はない．左辺に等号がついているときは注意

ゆえに　$m<k^2\leqq m+1$

つまり　$m+1\leqq k^2\leqq m+1$　より　$k^2=m+1$　よって　$m=k^2-1$

これは $k\geqq 2$ のときだけでなく $k=1$ のときも成り立つ．　したがって　$\boldsymbol{b_k=k^2-1}$

(2) $\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2}a_m+\sum_{k=1}^{n}b_k=n^3$　$\cdots\cdots$(※)

[1]　$n=1$ のとき　(※)の(左辺)$=a_1+b_1=[\sqrt{1}]+0=1=1^3=$(右辺)より(※)は成り立つ．

[2]　$n=i$ のとき　(※)つまり　$\displaystyle\sum_{m=1}^{i^2}a_m+\sum_{k=1}^{i}b_k=i^3$　が成り立つと仮定する．このとき

$$\sum_{m=1}^{(i+1)^2}a_m+\sum_{k=1}^{i+1}b_k=\sum_{m=1}^{i^2}a_m+\sum_{m=i^2+1}^{(i+1)^2}a_m+\sum_{k=1}^{i}b_k+b_{i+1}=i^3+(a_{i^2+1}+a_{i^2+2}+\cdots\cdots+a_{(i+1)^2})+b_{i+1}$$
$$=i^3+[\sqrt{i^2+1}]+[\sqrt{i^2+2}]+\cdots\cdots+[\sqrt{(i+1)^2}]+(i+1)^2-1$$

ここで自然数 j $(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2i)$ について

$i=\sqrt{i^2}<\sqrt{i^2+j}<\sqrt{i^2+2i+1}=i+1$ より　$i<\sqrt{i^2+j}<i+1$　であるから

$$[\sqrt{i^2+j}]=i$$

よって　$\displaystyle\sum_{m=1}^{(i+1)^2}a_m+\sum_{k=1}^{i+1}b_k=i^3+i\times 2i+(i+1)+\{(i+1)^2-1\}=(i+1)^3$

したがって　$n=i+1$のときも(※)が成り立つ．

[1][2] より，すべての自然数 n で(※)が成り立つ．

(3) $\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2}[\sqrt{m}]=\sum_{m=1}^{n^2}a_m=n^3-\sum_{k=1}^{n}b_k=n^3-\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)=n^3-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(4n^2-3n+5)}$

2　座標平面上に直線 $l: x\sin\theta+y\cos\theta=1\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ がある．

不等式　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x\sin\theta+y\cos\theta\geqq 1$ が表す領域を D,

不等式　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x\sin\theta+y\cos\theta\leqq 1$ が表す領域を D' とする．

D 内に半径 R の 2 つの円 C_1，C_2 を，C_1 は l と y 軸に接し，C_2 は l と x 軸に接し，さらに C_1 と C_2 が外接するようにとる．また D' 内に半径 r の 2 つの円 C_1'，C_2' を，C_1'は l と y 軸に接し，C_2'は l と x 軸に接し，さらにC_1'とC_2'が外接するようにとる．

(1)　$\dfrac{r}{R}$をθで表せ.　(2)　θが$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$の範囲を動くとき,$\dfrac{r}{R}$のとりうる値の範囲を求めよ.

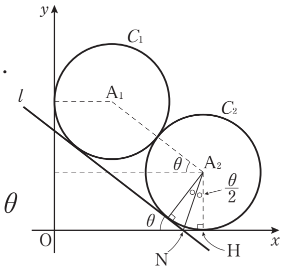
解答例

(1)　l の傾きは $-\tan\theta=\tan(\pi-\theta)$ であることから，x 軸の負方向と l のなす角が θ である．

また，直線 l の x 切片を N とする．

まず，R について考える．2 円 C_1，C_2 の中心をそれぞれ A_1，A_2 とし，

A_2 から x 軸に下ろした垂線の足を H とする．



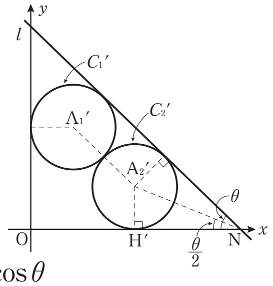
グラフより A_1，A_2 の x 座標はそれぞれ R，$R+2R\cos\theta$ である．

また，$\angle NA_2H=\dfrac{\theta}{2}$であることから

ON＋NH＝（A_2の x 座標）より　$\dfrac{1}{\sin\theta}+R\tan\dfrac{\theta}{2}=R+2R\cos\theta$

$$1+R\sin\theta\cdot\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=R\sin\theta+2R\sin\theta\cos\theta$$

ゆえに　$R=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta-1}$



同様に r について考える．2 円 C_1'，C_2' の中心をそれぞれ，

A_1'，A_2' とし，A_2' から x 軸に下ろした垂線の足を H′ とする．

ON−NH′＝（A_2'の x 座標）より　$\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{r}{\tan\dfrac{\theta}{2}}=r+2r\cos\theta$

ゆえに　$r=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta+1}$

したがって　$\boldsymbol{\dfrac{r}{R}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta+1}}$

(2)　$\sin\theta+\cos\theta=t$とおくと　$2\sin\theta\cos\theta=t^2-1$

また，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$　　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$より　$1<t\leqq\sqrt{2}$

$\dfrac{r}{R}=\dfrac{t^2+t-2}{t^2+t}=1-\dfrac{2}{t^2+t}$　　$1<t\leqq\sqrt{2}$ より　$2<t^2+t\leqq 2+\sqrt{2}$

よって，$\dfrac{r}{R}$のとりうる値の範囲は　$\boldsymbol{0<\dfrac{r}{R}\leqq\sqrt{2}-1}$

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。